

# Un sistema cuántico simple con entrelazamiento

## Un modelo alternativo del átomo de hidrógeno

Emmanuel Saucedo-Flores, Rubén Ruelas, Víctor Rangel-Cobián

Departamento de Ingeniería de Proyectos, CUCEI  
 Universidad de Guadalajara  
 Guadalajara, Jalisco, México

[emmanuel.saucedo, ruben.ruelas,victor.rangel]@ucei.udg.mx

**Abstract**— The study of a particle behavior in a finite dual well potential energy system is presented. It is found that some allowed particle energy levels create odd/even degenerated states with an allowed/forbidden tunneling duality. For the case when this type of energy level is near to the wells height, the particle shows a super-localization/ultra-dispersion duality (entanglement). The concept of ‘twin’ quantum systems is used to model the hydrogen atom spectral lines.

**Key Words**— *Dual potential well, Forbidden tunneling, Entanglement, Quantum twin system, Hydrogen model*

**Resumen**— Se presenta el estudio del comportamiento de una partícula en un sistema de dos pozos finitos de energía potencial. Se encuentran niveles de energía permitidos para la partícula que crean estados degenerados con naturaleza par/impar y la dualidad de tuneleo normal o prohibido. Para el caso cuando este tipo de nivel de energía es cercano a la altura de los pozos, la partícula muestra la dualidad súper-localización/ultra-dispersión (entrelazamiento). La noción de sistemas cuánticos ‘gemelos’ se usa para modelar las líneas espectrales del átomo de hidrógeno.

**Palabras claves**— *doble pozo de potencial, tuneleo prohibido, entrelazamiento, sistemas gemelos cuánticos, modelo del hidrógeno.*

### I. DEFINICIÓN DEL SISTEMA

En este trabajo se presenta la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, y se determinan las funciones de onda que describen el comportamiento cuántico de un sistema consistente de una partícula que interactúa con una función de energía potencial unidimensional  $U(x)$ , conformada por dos pozos rectos con profundidad  $U_0$ , anchura  $b$  y separación  $2a$  que dan lugar a cinco regiones definidas mediante

$$U(x) = \begin{cases} 0 & a \leq |x| \leq a + b = L \\ U_0 & |x| < a \text{ y } |x| > L \end{cases} \tag{1}$$

La expresión anterior se grafica en la Fig. 1.

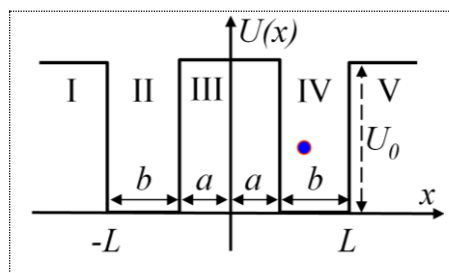


Fig. 1. Sistema de una partícula en dos pozos rectos de energía potencial finita.

En lo que sigue consideraremos que la partícula en el sistema es un electrón, con carga  $q$  y masa en reposo  $m_0$ , a la que se le asignan los factores de masa efectiva  $m_I$  para las regiones I y V,  $m_2$  para las regiones II y IV y  $m_3$  para la región III.

## II. DERIVACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Abordemos primeramente el caso en el que la energía de la partícula  $E$  cumple con  $0 < E < U_0$ . Bajo esta consideración se resuelve el conjunto de ecuaciones de Schrödinger independientes del tiempo siguiente

$$\frac{d^2\varphi_I(x)}{dx^2} - \alpha_1^2\varphi_I(x) = 0, \quad x \leq -(a+b) = -L \quad (2)$$

$$\frac{d^2\varphi_{II}(x)}{dx^2} - \alpha_2^2\varphi_{II}(x) = 0, \quad -L < x < -a \quad (3)$$

$$\frac{d^2\varphi_{III}(x)}{dx^2} - \alpha_3^2\varphi_{III}(x) = 0, \quad -a < x \leq a \quad (4)$$

$$\frac{d^2\varphi_{IV}(x)}{dx^2} - \alpha_2^2\varphi_{IV}(x) = 0, \quad a < x < L \quad (5)$$

$$\frac{d^2\varphi_V(x)}{dx^2} - \alpha_1^2\varphi_V(x) = 0, \quad x \geq (a+b) = L \quad (6)$$

donde  $\varphi_{I-V}(x)$  son las funciones de onda para cada una de las regiones del sistema y cuyos parámetros se han definido conforme a las siguientes expresiones

$$\alpha_1 \equiv F_1\sqrt{U_0 - E}, \quad \alpha_2 \equiv F_2\sqrt{E}, \quad \alpha_3 \equiv F_3\sqrt{U_0 - E} \quad (1/m) \quad (7)$$

$$F_1 \equiv \sqrt{2m_1m_0q/\hbar^2}, \quad F_2 \equiv \sqrt{2m_2m_0q/\hbar^2}, \quad F_3 \equiv \sqrt{2m_3m_0q/\hbar^2} \quad (1/m/eV^{1/2}) \quad (8)$$

aquí  $\hbar^2$  es la constante de Planck dividida por  $2\pi$ .

### A. Solución general

La solución general para (2) a (6) es

$$\varphi_I(x) = A_1e^{\alpha_1x} + B_1e^{-\alpha_1x} \quad (1/\sqrt{m}) \quad x \leq -(a+b) = -L \quad (9)$$

$$\varphi_{II}(x) = A_2 \sin(\alpha_2x) + B_2 \cos(\alpha_2x) \quad (1/\sqrt{m}) \quad -L < x < -a \quad (10)$$

$$\varphi_{III}(x) = A_3e^{\alpha_3x} + B_3e^{-\alpha_3x} \quad (1/\sqrt{m}) \quad -a < x \leq a \quad (11)$$

$$\varphi_{IV}(x) = A_4 \sin(\alpha_2x) + B_4 \cos(\alpha_2x) \quad (1/\sqrt{m}) \quad a < x < L \quad (12)$$

$$\varphi_V(x) = A_5e^{\alpha_1x} + B_5e^{-\alpha_1x} \quad (1/\sqrt{m}) \quad x \geq (a+b) = L \quad (13)$$

donde los factores  $A_{1-5}$  y  $B_{1-5}$  son constantes de integración que se determinan a continuación tanto para el caso de soluciones pares como impares.

### Solución para funciones de onda pares

Para funciones de onda pares, de (9) y (13), se debe cumplir que  $\varphi_I(x) = \varphi_V(-x)$ ,  $\varphi_{II}(x) = \varphi_{IV}(-x)$  y  $\varphi_{III}(x) = \varphi_{III}(-x)$ . Para determinar las constantes de integración debemos notar, en primer lugar, que para evitar divergencia en las funciones  $\varphi_I(x)$  y  $\varphi_V(x)$  y que se cumpla que éstas se anulen cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , se debe tener que  $B_1 = A_5 = 0$  y junto con la simetría considerada se puede deducir que  $A_I = B_5$ . Aplicando

la misma consideración en (10) y (12), se concluye que  $A_2 = A_4 = 0$  y  $B_2 = B_4$ . Similarmente, de (11) se sigue que  $A_3 = B_3$ .

Con lo anterior, (9) a (13) pasan, para este caso, a

$$\varphi_{I,ev}(x) = A_1 e^{\alpha_1 x} \quad (1/\sqrt{m}) \quad x \leq -(a+b) = -L \tag{14}$$

$$\varphi_{II,ev}(x) = B_2 \cos(\alpha_2 x) \quad (1/\sqrt{m}) \quad -L < x < -a \tag{15}$$

$$\varphi_{III,ev}(x) = 2A_3 \cosh(\alpha_3 x) \quad (1/\sqrt{m}) \quad -a < x \leq a \tag{16}$$

$$\varphi_{IV,ev}(x) = B_4 \cos(\alpha_2 x) \quad (1/\sqrt{m}) \quad a < x < L \tag{17}$$

$$\varphi_{V,ev}(x) = A_1 e^{-\alpha_1 x} \quad (1/\sqrt{m}) \quad x \geq (a+b) = L \tag{18}$$

Consideremos ahora las implicaciones de continuidad de las funciones y de sus derivadas en las paredes de los pozos de potencial. Las funciones  $\varphi_{I,ev}(x)$  y  $\varphi_{II,ev}(x)$  en (14) y (15), evaluadas en  $x = -L$ , permiten derivar que

$$A_1 = B_2 \cos(\alpha_2 L) e^{\alpha_1 L} \tag{19}$$

Para las derivadas de estas mismas funciones evaluadas en el mismo punto se obtiene

$$A_1 = B_2 \frac{\alpha_2 \sin(\alpha_2 L) e^{\alpha_1 L}}{\alpha_1} \tag{20}$$

De las dos expresiones anteriores se deriva que

$$\alpha_2 \tan(\alpha_2 L) = \alpha_1 \tag{21}$$

Considerando ahora las funciones en (15) y (16), evaluadas en  $x = -a$ , se deduce que

$$2A_3 = B_2 \frac{\cos(\alpha_2 a)}{\cosh(\alpha_3 a)} \tag{22}$$

Mientras que para las derivadas evaluadas en el mismo punto se obtiene

$$2A_3 = -B_2 \frac{\alpha_2 \sin(\alpha_2 a)}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3 a)} \tag{23}$$

De (22) y (23) se llega a

$$\alpha_2 \tan(\alpha_2 a) = -\alpha_3 \tanh(\alpha_3 a) \tag{24}$$

Retomaremos (21) y (24) un poco más adelante. Por el momento utilicemos (20) y (22) para escribir (14) a (18) en términos de  $B_2$  únicamente, es decir,

$$\varphi_{I,ev}(x) = B_2 \cos(\alpha_2 L) e^{\alpha_1(x+L)} \quad (1/\sqrt{m}) \quad x \leq -(a+b) = -L \tag{25}$$

$$\varphi_{II,ev}(x) = B_2 \cos(\alpha_2 x) \quad (1/\sqrt{m}) \quad -L < x < -a \tag{26}$$

$$\varphi_{III,ev}(x) = B_2 \frac{\cos(\alpha_2 a)}{\cosh(\alpha_3 a)} \cosh(\alpha_3 x) \quad (1/\sqrt{m}), \quad -a \leq x \leq a \tag{27}$$

$$\varphi_{IV,ev}(x) = B_4 \cos(\alpha_2 x) \quad (1/\sqrt{m}) \quad a < x < L \tag{28}$$

$$\varphi_{V,ev}(x) = B_2 \cos(\alpha_2 L) e^{-\alpha_1(x-L)} \quad (1/\sqrt{m}) \quad x \geq (a+b) = L \tag{29}$$

Consideremos uno de los postulados de la mecánica cuántica para determinar  $B_2$ , esto es,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ev}^*(x) \varphi_{ev}(x) dx = 2 \int_{-\infty}^0 \varphi_{ev}^*(x) \varphi_{ev}(x) dx \tag{30}$$

Donde  $\varphi_{ev}(x)$  es una función de onda global del sistema y  $\varphi_{ev}^*(x)$  su complejo conjugado, de tal manera que su producto,  $\varphi_{ev}^*(x)\varphi_{ev}(x)$ , corresponde a la densidad de probabilidad de la partícula. La integral en (30) se ha reescrito únicamente para los valores negativos y, de acuerdo a las dimensiones del pozo de potencial, ésta puede dividirse en la suma de tres términos, el primero de ellos correspondiente a

$$I_{1,ev} = \int_{-\infty}^{-L} \varphi_{1,ev}^*(x) \varphi_{1,ev}(x) dx \tag{31}$$

y con (25) se obtiene

$$I_{1,ev} = B_2^2 \cos^2(\alpha_2 L) \int_{-\infty}^{-L} e^{2\alpha_1(x+L)} dx = \frac{B_2^2 \cos^2(\alpha_2 L)}{2\alpha_1} e^{2\alpha_1(x+L)} \Big|_{-\infty}^{-L} \tag{32}$$

cuya evaluación proporciona

$$I_{1,ev} = \frac{B_2^2 \cos^2(\alpha_2 L)}{2\alpha_1} = T_{1,ev} B_2^2 \tag{33}$$

donde se ha introducido la siguiente definición

$$T_{1,ev} \equiv \frac{\cos^2(\alpha_2 L)}{2\alpha_1} \quad (m) \tag{34}$$

El segundo término de la integral corresponde a la función de onda de la región II. Por tanto, con (26)

$$I_{2,ev} = B_2^2 \int_{-L}^{-a} \cos^2(\alpha_2 x) dx = B_2^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\sin(2\alpha_2 x)}{4\alpha_2} \right) \Big|_{-L}^{-a} = T_{2,ev} B_2^2 \tag{35}$$

donde

$$T_{2,ev} \equiv \frac{b}{2} + \frac{\sin(2\alpha_2 L) - \sin(2\alpha_2 a)}{4\alpha_2} \quad (m) \tag{36}$$

Finalmente, el tercer término de la integral involucra la ecuación (27), lo que resulta en

$$I_{3,ev} = \frac{B_2^2 \cos^2(\alpha_2 a)}{\cosh^2(\alpha_3 a)} \int_{-a}^0 \cosh^2(\alpha_3 x) dx = \frac{B_2^2 \cos^2(\alpha_2 a)}{\cosh^2(\alpha_3 a)} \left( \frac{x}{2} + \frac{\sinh(2\alpha_3 x)}{4\alpha_3} \right) \Big|_{-a}^0 = T_{3,ev} B_2^2 \tag{37}$$

con

$$T_{3,ev} \equiv \frac{\cos^2(\alpha_2 a)}{\cosh^2(\alpha_3 a)} \left( \frac{a}{2} + \frac{\sinh(2\alpha_3 a)}{4\alpha_3} \right) \quad (m) \tag{38}$$

Si ahora se suman los resultados de los tres términos (33), (35) y (37) de la integral en (20), para  $B_2$  encontramos

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{2(T_{1,ev} + T_{2,ev} + T_{3,ev})}} \quad (1/\sqrt{m}) \tag{39}$$

Por tanto, las funciones de onda de (25) a (29) han sido completamente determinadas.

*Niveles de energía permitidos para funciones de onda pares*

Regresemos a (21) y (24). La eliminación de  $\alpha_2$ , usando (7) y (8), permite derivar la siguiente ecuación trascendental

$$\frac{\sin(aF_2\sqrt{E_{Ev}})\cos(LF_2\sqrt{E_{Ev}})}{\rho \tanh(aF_3\sqrt{U_0 - E_{Ev}})} = -\cos(aF_2\sqrt{E_{Ev}})\sin(LF_2\sqrt{E_{Ev}}) \tag{40}$$

A partir de la cual es posible obtener, ya sea de manera gráfica o numérica, los niveles permitidos de energía de la partícula para el caso de las funciones de onda pares. En (40)  $\rho$  está definido como

$$\rho = \sqrt{\frac{m_3}{m_1}} \tag{41}$$

Ahora, usando un par de identidades trigonométricas, la ecuación (41) se puede transformar en

$$\sin(bF_2\sqrt{E_{Ev}}) + \sin((L+a)F_2\sqrt{E_{Ev}}) = \rho T_1 [\sin(bF_2\sqrt{E_{Ev}}) - \sin((L+a)F_2\sqrt{E_{Ev}})] \tag{42}$$

donde  $T_1$  corresponde a

$$T_1 \equiv \tanh(aF_3\sqrt{U_0 - E_{Ev}}) \tag{43}$$

Una expresión analítica para los valores seleccionados de  $E_{Ev}$  será derivada de (42) más abajo.

*Solución para funciones de onda impares*

Consideremos ahora la solución con funciones de onda impares para las ecuaciones (2) a (6). Siguiendo una derivación similar a la usada arriba para las funciones pares se obtiene

$$\varphi_{I,odd}(x) = -A_2 \sin(\alpha_2 L) e^{\alpha_1(x+L)} \quad (1/\sqrt{m}), \quad x \leq -L \tag{44}$$

$$\varphi_{II,odd}(x) = A_2 \sin(\alpha_2 x) \quad (1/\sqrt{m}), \quad -L < x < -a \tag{45}$$

$$\varphi_{III,odd}(x) = A_2 \frac{\sin(\alpha_2 a)}{\sinh(\alpha_3 a)} \sinh(\alpha_3 x) \quad (1/\sqrt{m}), \quad -a \leq x \leq a \tag{46}$$

$$\varphi_{IV,odd}(x) = A_2 \sin(\alpha_2 x) \quad (1/\sqrt{m}), \quad a < x < L \tag{47}$$

$$\varphi_{V,odd}(x) = A_2 \sin(\alpha_2 L) e^{-\alpha_1(x-L)} \quad (1/\sqrt{m}), \quad x \geq L \tag{48}$$

donde  $A_2$  es una constante de integración dada por

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2(T_{1,odd} + T_{2,odd} + T_{3,odd})}} \quad (1/\sqrt{m}), \quad x \leq -L \tag{49}$$

en donde se han introducido las definiciones siguientes

$$T_{1,odd} \equiv \frac{\sin^2(\alpha_2 L)}{2\alpha_1} \quad (m) \tag{50}$$

$$T_{2,odd} \equiv \frac{b}{2} - \frac{\sin(2\alpha_2 L) - \sin(2\alpha_2 a)}{4\alpha_2} \quad (m) \tag{51}$$

$$T_{3,odd} \equiv \frac{\sin^2(\alpha_2 a)}{\sinh^2(\alpha_3 a)} \left( \frac{\sinh(2\alpha_3 a)}{4\alpha_3} - \frac{a}{2} \right) \quad (m) \tag{52}$$

*Niveles de energía permitidos para funciones de onda impares*

Nuevamente, a partir de las consideraciones de continuidad en los límites que se espera cumplan las funciones (44) a (48) y sus derivadas, es posible establecer la siguiente ecuación transcendental

$$\frac{\sin(aF_2\sqrt{E_{Odd}})\cos(LF_2\sqrt{E_{Odd}})}{\rho^{-1}\tanh(aF_3\sqrt{U_0 - E_{Odd}})} = -\cos(aF_2\sqrt{E_{Odd}})\sin(LF_2\sqrt{E_{Odd}}) \tag{53}$$

A partir de la cual es posible obtener, de manera gráfica o numérica, los niveles de energía permitidos a la partícula para el caso de las funciones de onda impares. En este caso,  $\rho$  está definido igual que en (41). Además, con el uso de identidades trigonométricas la ecuación (53) se puede convertir a

$$-\sin(bF_2\sqrt{E_{Odd}}) - \sin((L+a)F_2\sqrt{E_{Odd}}) = -\rho^{-1}T_2[\sin(bF_2\sqrt{E_{Odd}}) - \sin((L+a)F_2\sqrt{E_{Odd}})] \tag{54}$$

donde se ha introducido un signo negativo en ambos lados de la ecuación, con el fin de tener una mayor claridad gráfica al momento de comparar con la ecuación (42). En (54)  $T_2$  está definido como

$$T_2 \equiv \tanh(aF_3\sqrt{U_0 - E_{Odd}}) \tag{55}$$

De la misma manera que para los valores de  $E_{Ev}$  en (42), más abajo se deriva una expresión analítica a partir de (54) para los valores seleccionados de  $E_{Odd}$ .

### III. SOLUCIÓN PARA E = 0

#### A. Conjunto de ecuaciones de Schrödinger

El conjunto de ecuaciones de Schrödinger independientes en el tiempo para este caso de energía de la partícula está dado por

$$\frac{d^2\varphi_{I,0}(x)}{dx^2} - \alpha_1^2\varphi_{I,0}(x) = 0, \quad x \leq -L \tag{56}$$

$$\frac{d^2\varphi_{II,0}(x)}{dx^2} = 0, \quad -L < x < -a \tag{57}$$

$$\frac{d^2\varphi_{III,0}(x)}{dx^2} - \alpha_3^2\varphi_{III,0}(x) = 0, \quad -a \leq x \leq a \tag{58}$$

$$\frac{d^2\varphi_{IV,0}(x)}{dx^2} = 0, \quad a < x < L \tag{59}$$

$$\frac{d^2\varphi_{V,0}(x)}{dx^2} - \alpha_{1,0}^2\varphi_{V,0}(x) = 0, \quad x \geq L \tag{60}$$

donde  $\varphi_{I-V,0}$  son las funciones de onda correspondientes a cada una de las regiones de la Fig. 1. Los valores  $\alpha_{1,3}$  se calculan con (7) y el potencial  $E = 0$ .

Usando un procedimiento de derivación, similar al usado en las secciones previas, es posible encontrar dos soluciones en este caso, una para la función de onda par y otra para la impar. La solución en el caso par está dada por

$$\varphi_{I,0,ev}(x) = B_{2,0}e^{\alpha_1(x+L)} \quad (1/\sqrt{m}), \quad x \leq -L \quad (61)$$

$$\varphi_{II,0,ev}(x) = B_{2,0} \quad (1/\sqrt{m}), \quad -L < x < -a \quad (62)$$

$$\varphi_{III,0,ev}(x) = \frac{B_{2,0}}{\cosh(\alpha_3 a)} \cosh(\alpha_3 x) \quad (1/\sqrt{m}), \quad -a \leq x \leq a \quad (63)$$

$$\varphi_{IV,0,ev}(x) = B_{2,0} \quad (1/\sqrt{m}), \quad a < x < L \quad (64)$$

$$\varphi_{V,0,ev}(x) = B_{2,0}e^{-\alpha_1(x-L)} \quad (1/\sqrt{m}), \quad x \geq L \quad (65)$$

donde

$$B_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{2(T_{1,0,ev} + T_{2,0,ev} + T_{3,0,ev})}} \quad (1/\sqrt{m}) \quad (66)$$

y las definiciones siguientes han sido introducidas

$$T_{1,0,ev} \equiv \frac{1}{2\alpha_1} \quad (m) \quad (67)$$

$$T_{2,0,ev} \equiv b \quad (m) \quad (68)$$

$$T_{3,0,ev} \equiv \frac{1}{\cosh^2(\alpha_3 a)} \left( \frac{a}{2} + \frac{\sinh(2\alpha_3 a)}{4\alpha_3} \right) \quad (m) \quad (69)$$

La solución para la función de onda impar está dada por

$$\varphi_{I,0,odd}(x) = -A_{2,0}Le^{\alpha_1(x+L)} \quad (1/\sqrt{m}), \quad x \leq -L \quad (70)$$

$$\varphi_{II,0,odd}(x) = A_{2,0}x \quad (1/\sqrt{m}), \quad -L < x < -a \quad (71)$$

$$\varphi_{III,0,odd}(x) = \frac{A_{2,0}a}{\sinh(\alpha_3 a)} \sinh(\alpha_3 x) \quad (1/\sqrt{m}), \quad -a \leq x \leq a \quad (72)$$

$$\varphi_{IV,0,odd}(x) = A_{2,0}x \quad (1/\sqrt{m}), \quad a < x < L \quad (73)$$

$$\varphi_{V,0,odd}(x) = A_{2,0}Le^{-\alpha_1(x-L)} \quad (1/\sqrt{m}), \quad x \geq L \quad (74)$$

donde

$$A_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{2(T_{1,0,odd} + T_{2,0,odd} + T_{3,0,odd})}} \quad (1/m/\sqrt{m}) \quad (75)$$

con

$$T_{1,0,odd} \equiv \frac{L^2}{2\alpha_1} \quad (m^3) \quad (76)$$

$$T_{2,0,odd} \equiv \frac{L^3 - a^3}{3} \quad (m^3) \tag{77}$$

$$T_{3,0,odd} \equiv \frac{a^2}{\sinh^2(\alpha_3 a)} \left( \frac{\sinh(2\alpha_3 a)}{4\alpha_3} - \frac{a}{2} \right) \quad (m^3) \tag{78}$$

### NIVELES DE ENERGÍA ESPECIALES

#### A. Túneleo prohibido de la partícula o super-localización en los pozos (WSL). Degeneración par-impar

Inspeccionando el lado derecho de (40) encontramos que cuando la energía de la partícula es tal que

$$\cos(aF_2\sqrt{E_{Ev}}) = \cos(\alpha_2 a) = 0 \tag{79}$$

entonces el término izquierdo debe satisfacer

$$\cos(LF_2\sqrt{E_{Ev}}) = \cos(\alpha_2 L) = 0 \tag{80}$$

De aquí podemos concluir que las funciones de onda pares (25), (27) y (29) se anulan, de tal manera que la partícula queda totalmente confinada dentro de los pozos de potencial, esto es, un efecto de túneleo prohibido se presenta para todos los niveles de energía que satisfacen (79) y (80). En otras palabras, si evaluamos los términos de (34) y (38) de la integral (30), veremos que estos serán iguales a cero.

Ahora, dado que (79) y (80) también aparecen en (53), éstas se cumplirán cuando los valores de  $E_{Odd}$  sean iguales a los de  $E_{Ev}$ . Así, estos valores de energía especiales permitidos constituyen estados degenerados que tienen una dualidad par-impar. No obstante, las funciones de onda impares no muestran el efecto de túneleo prohibido debido a que las expresiones (44) a (48) no se anulan para las condiciones aquí analizadas.

Por otra parte, si seguimos una derivación similar usando el factor con la función sinusoidal en el lado derecho de (53), tenemos que si

$$\sin(LF_2\sqrt{E_{Odd}}) = \sin(\alpha_2 L) = 0 \tag{81}$$

se tendrá que el lado izquierdo de la ecuación de esa expresión debe dar

$$\sin(aF_2\sqrt{E_{Odd}}) = \sin(\alpha_2 a) = 0 \tag{82}$$

Así podemos establecer que las funciones de onda impares de (44), (46) y (48) se anulan, de tal manera que la partícula está totalmente confinada dentro de los pozos de potencial, esto es, se presenta un efecto de túneleo prohibido para todas las funciones de onda impares con esos niveles de energía de la partícula, los cuales satisfacen (81) y (82). Además, es de notar que en estas circunstancias los términos (50) y (52) de la integral toman un valor igual a cero.

De igual manera que en el caso anterior, los términos seno de (81) y (82) aparecen en (40) y por ello los niveles correspondientes de  $E_{Ev}$  deben ser iguales a los de  $E_{Odd}$  obteniendo nuevamente una degeneración dual; aunque en estas circunstancias las funciones de onda pares (25) a (29) no cumplen con la condición de túneleo prohibido. Por tanto, los estados de energía obtenidos presentan la dualidad par-impar pero con un comportamiento de túneleo opuesto en comparación con el caso anterior.



Cuando los factores de masa efectiva  $m_1$  y  $m_3$  son iguales,  $\rho$ , en (41), es igual a uno. Ahora, dado que  $T_1$  en (43) y  $T_2$  en (55) son números siempre positivos, podemos derivar de (42) y (54) que los valores de energía que producen un comportamiento de estados degenerados, con o sin WSL, deben cumplir con

$$(L + a)F_2\sqrt{E_n} = \pi n, \quad n = 1,2,3,\dots \quad (83)$$

mientras que los valores de energía que dan lugar a estados degenerados en los que una de las simetrías de las funciones de onda de la partícula presenta WSL deben, adicionalmente, cumplir que

$$(L - a)F_2\sqrt{E_s} = \pi s, \quad s = 1,2,3,\dots \quad (84)$$

de aquí, dado que los valores de energía deben ser iguales, se obtiene

$$n = \frac{L + a}{L - a} s = \frac{b + 2a}{b} s = (1 + \frac{2a}{b}) s = (1 + k) s > s \quad (85)$$

donde  $k$ , correspondiente al cociente de la distancia entre pozos entre el ancho de los pozos, está definida como

$$k \equiv \frac{2a}{b} \quad (86)$$

entonces, de (83) y usando (8), la expresión general del sistema par-impar con los niveles de energía degenerados está dada por

$$E_n = \left( \frac{\hbar\pi n}{(2a + b)\sqrt{2m_2 m_0 q}} \right)^2 = \left( \frac{\hbar\pi n}{(a + b/2)\sqrt{8m_2 m_0 q}} \right)^2 \quad (eV), \quad n = 1,2,3,\dots \quad (87)$$

mientras que de (84) y (8), la expresión para los niveles de energía con una simetría de las funciones de onda que muestra la condición WSL, alternadamente con la otra simetría, está dada por

$$E_s = \left( \frac{\hbar\pi s}{b\sqrt{2m_2 m_0 q}} \right)^2 \quad (eV), \quad s = 1,2,3,\dots \quad (88)$$

donde  $s$  satisface la expresión (85).

Vale la pena señalar la dependencia inversa entre los parámetros del sistema para los valores de energía en (87) y (88). Los casos remarcables son cuando la partícula es casi nula y/o casi libre de masa, esto es,  $q \approx 0$  y/o  $m_2 m_0 \approx 0$ , lo cual se consigue con un sistema de dimensión muy estrecha, es decir,  $L + a \approx 0$ . En tales circunstancias, la excitación del primer nivel de energía permitido, en caso de existir alguno, estaría demasiado separado del nivel de energía más bajo del sistema,  $E \approx 0$ , lo cual podría terminar como el único nivel permitido a la partícula, a menos que la profundidad del pozo de potencial  $U_0$  del sistema resulte ser de un valor muy elevado. En este manuscrito no entraremos en más detalles para estos casos extremos típicos de sistemas de dimensiones nucleares, más bien nos enfocamos en el modelado de un electrón en sistemas de dimensiones atómicas.

Por otro lado, puede observarse el efecto contrario, esto es, el número de estados excitados permitidos pueden encontrarse demasiado cerca uno de otro, particularmente cerca de  $E = 0$ , cuando las dimensiones del sistema y/o la masa efectiva de la partícula se incrementa. Los ejemplos de cálculo dados más abajo ilustran claramente este comportamiento.

Adicionalmente, a partir de (87) es posible obtener los mismos niveles de energía permitidos excitados con diferentes combinaciones de las dimensiones  $a$  y  $b$  del sistema, en donde se mantiene constante el término  $a + b/2$ , es decir, el punto central del pozo; otros parámetros del sistema pueden

mantenerse constantes o escogerse para variar proporcionalmente en sentido opuesto a los datos geométricos. A pesar de ser diferentes, este tipo de sistemas - gemelos energéticamente - no permiten ser diferenciados por sus transiciones entre sus niveles de energía, a menos que la naturaleza simétrica de la función de onda y/o su comportamiento WSL tenga un impacto en la probabilidad de transición de la partícula. En un trabajo futuro se demostrará que  $\pm(a + b/2)$  son valores modales para la coordenada  $x$  de la partícula para todas las funciones de onda que presenten WSL.

*Longitudes de onda emitidas por un fotón en las transiciones entre los niveles de energía*

Cuando el sistema es tal que sus niveles de energía están dados por (87), es posible derivar una expresión para la longitud de onda emitida por el fotón cuando la partícula transita de un nivel de energía inicial  $n_i$  más alto a un nivel de energía final  $n_f$  más bajo. Introduciendo el radio atómico del hidrógeno  $r_H$  en el numerador y denominador de (87), para el nivel de energía inicial obtenemos

$$E_{n_i} = \left( \frac{r_H \hbar \pi n_i}{r_H (L+a) \sqrt{2m_2 m_0 q}} \right)^2 = \frac{K_e}{m_2} \left( \frac{r_H n_i}{L+a} \right)^2 \quad (eV), \quad n_i = 1,2,3, \dots \quad (89)$$

donde la constante  $K_e$  ha sido definida como

$$K_e \equiv \left( \frac{h}{2r_H \sqrt{2m_0 q}} \right)^2 = 134.28163 \quad (eV) \quad (90)$$

De igual manera, la expresión para el nivel de energía final está dado por

$$E_{n_f} = \frac{K_e}{m_2} \left( \frac{r_H n_f}{L+a} \right)^2 \quad (eV) \quad n_f = 0,1,2,3 < n_i \dots \quad (91)$$

Ahora, si a la ecuación (91) le restamos (89) y usamos la relación de Planck de la energía de un fotón,  $E$ , contra su longitud de onda  $\lambda$ , dada por

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (eV) \quad (92)$$

en donde  $c$  representa la velocidad de la luz, obtenemos

$$\lambda_{n_i, n_f, DWPS} = \frac{m_2 hc}{K_e} \left( \frac{L+a}{r_H} \right)^2 \frac{1}{n_i^2 - n_f^2} \quad (m), \quad n_i = 1,2,3... > n_f = 0,1,2,..., n_i - 1 \quad (93)$$

Para efectos de comparación, la expresión general correspondiente a las líneas de emisión del modelo de hidrógeno de Bohr para las transiciones de energía, está dado por la ecuación de Rydberg como sigue

$$\lambda_{n_i, n_f, H} = \frac{1}{R} \frac{n_i^2 n_f^2}{n_i^2 - n_f^2} \quad (m), \quad n_i = 2,3,4,...\infty > n_f = 1,2,3,... \quad (94)$$

donde  $R$ , la constante de Rydberg, toma un valor de  $1.097373 \times 10^7$  (1/m).

La expresión (94) da lugar a seis series espectrales bien conocidas dependiendo del valor de  $n_f$ . Éstas son las series de: Lyman, Balmer, Paschen, Bracket, Pfund y Humphreys para valores de  $n_f = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$ , respectivamente.

*Dualidad Super-localización/Ultra-dispersión de la partícula en un pozo de potencial finito*

En el caso particular, cuando los parámetros del sistema son tales que en (88)  $E_s \approx U_0$ , se observa que la función de onda super-localizada degenerada está presente para un tipo de simetría de las funciones de

onda, esto es, la partícula está confinada dentro de los pozos mientras que para la otra simetría, la función de onda se vuelve extremadamente dispersa como sería de esperarse para una partícula prácticamente libre; la simetría de función de onda super-localizada depende de cuál expresión, (79) u (81), toma un valor muy cercano a cero, mientras que el caso ultra-disperso se presenta debido a una reducción significativa – más allá de un orden de magnitud – ya sea de  $B_2$  o  $A_2$  en (39) o (49), respectivamente, lo cual hace que la integral de la función de densidad de probabilidad para  $|x| < L$  varíe de prácticamente 1.0 para el túneleo prohibido o WSL hasta un valor inferior a 0.01 para el caso ultra-disperso.

Este comportamiento de las distribuciones de la partícula de corto o largo alcance (en o fuera de casa), es un ejemplo de un estado cuántico degenerado para el que se espera que la partícula exista en cualquiera de dos distribuciones espaciales completamente diferentes, sin necesidad de consumir energía ni implicar tiempo de tránsito entre ellas, fenómeno conocido como entrelazamiento cuántico o como Einstein se refirió a él, efecto de "acción fantasmal a distancia". Esta rara denominación se debe principalmente a su implicación en la teleportación de entidades cuánticas que en la actualidad han encontrado un uso práctico importante en la computación cuántica [1].

#### IV. EJEMPLOS DE CÁLCULOS

##### A. Sistemas casos I y II. Ejemplos de la dualidad WSL/UD

En esta sección estudiamos dos casos (I y II) del sistema de doble pozo de potencial para ilustrar la dualidad de la super-localización (WSL)/ultra-dispersión (UD) de la partícula. Los parámetros para el sistema caso I se proporcionan en la Fig. 2, en donde también se muestran las gráficas de las ecuaciones (42) y (44), así como los valores de energía de la solución, es decir, los niveles de energía permitidos al sistema. Como puede verse, los cinco niveles de energía están doblemente degenerados con la naturaleza de dualidad par-impar; los valores de  $E$  donde todas los trazos cruzan por cero corresponden a niveles de energía que presentan un comportamiento WSL de la partícula para una de las dos funciones de onda posibles. Para el caso de este sistema, estos valores pueden también derivarse de manera analítica usando las ecuaciones (87) y (88).

La Fig. 3 a) proporciona ejemplos de las funciones de onda obtenidas usando el conjunto de ecuaciones (25)-(29), (44)-(48), (61)-(65) y (70)-(74); las densidades de probabilidad de la partícula, para un valor positivo de  $x$ , se muestran en la Fig. 3 b), mientras que la Fig. 3 c) muestra las gráficas de probabilidad acumulada para los niveles 2 y 4. Aquí es importante notar que la función de onda WSL para  $n = 2$  tiene una simetría par.

Para el caso de  $n = 4$  ( $s = 2$ ), esto es, cuando  $E_4 \approx U_0$ , la función de onda impar es WSL mientras que la función par está distribuida a través de todo el sistema, de aquí que la partícula tiene la naturaleza UD. Es de resaltar también que la gráfica correspondiente a este caso en Fig. 3 c) presenta una pendiente pequeña de la función de onda  $\varphi_{4, ev}(x)$ , que de hecho tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ , lo cual es un requerimiento de los postulados de la mecánica cuántica.

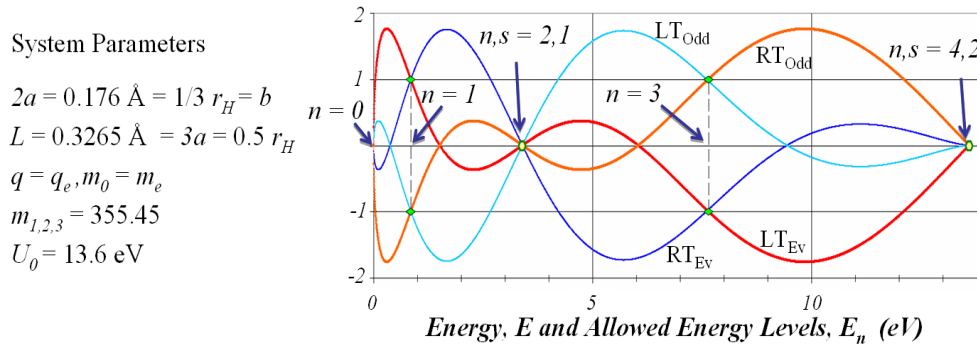


Fig. 2. Izquierda, valor de los parámetros para el sistema del caso I que tiene un total de cinco niveles de energía permitidos. Derecha, gráficas de los términos izquierdo y derecho,  $LT_{Ev}$ ,  $LT_{Odd}$ ,  $RT_{Ev}$  y  $RT_{Odd}$  de (42) y (54), respectivamente.

La función de energía potencial del sistema del caso I  $U_I(x)$ , los niveles de energía de la partícula permitidos  $E_n$  y las longitudes de onda  $\lambda$  para todas las transiciones posibles entre los niveles de energía se muestran en la Fig. 4. En este punto es importante notar que algunas de las longitudes de onda obtenidas corresponden a líneas de emisión espectral del hidrógeno y que se conocen como series de Lyman (UV), Balmer (visible) y Brackett (IR). Los valores de  $\lambda$  escritos en **negrita** corresponden a los valores límite de estas series espectrales.

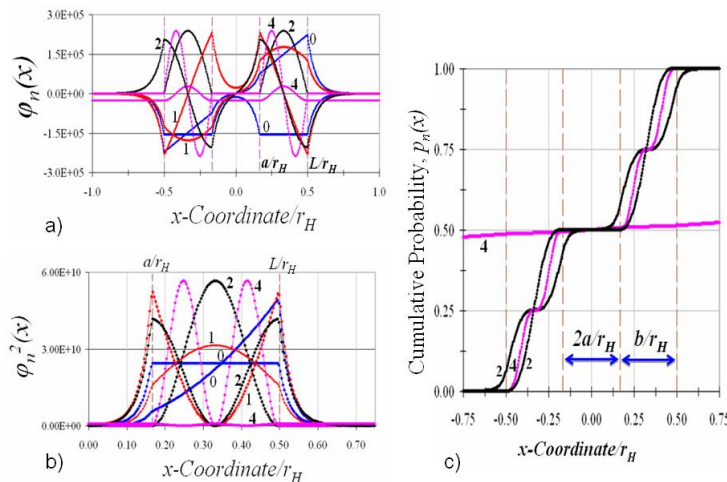


Fig. 3. Ejemplos de cálculo de funciones de onda, a), densidades de probabilidad, b), y probabilidad acumulada, c), para el sistema caso I con un total de cinco niveles de energía permitidos.

Los valores de los parámetros para el sistema caso II se proporcionan en la Fig. 5 los cuales, comparados con los valores del caso I, corresponden a dimensiones más grandes de la barrera y del pozo. Como se puede observar en la Fig. 5 b), c) y d), este sistema presenta seis niveles de energía excitados, todos ellos asociados con estados degenerados y con una naturaleza WSL con  $n = 2, 4$  y  $6$  para una de sus funciones de onda. En esta ocasión, para  $n = 6$  ( $s = 3$ ), esto es  $E_6 \approx U_0$ , la función de onda impar es WSL mientras que la función par tiene un comportamiento UD y se comporta correctamente cuando  $x \rightarrow \infty$ .

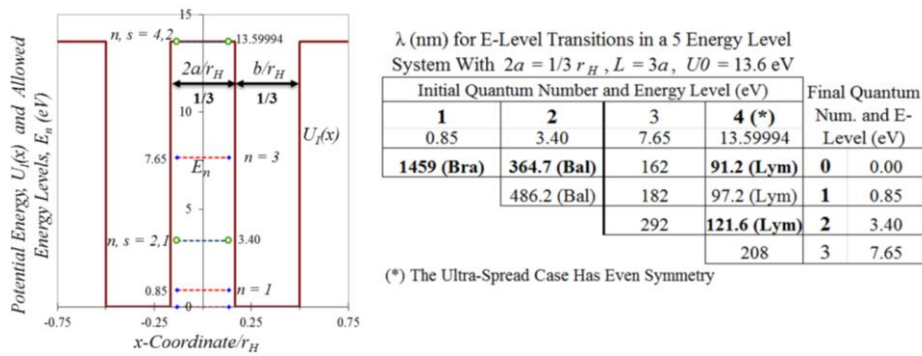


Fig. 4. Izquierda, función de energía potencial  $U_I(x)$  y niveles permitidos  $E_n$  para el caso de un sistema con cuatro niveles de energía excitados. Derecha, longitudes de onda emitidas para los saltos de energía de la partícula entre los niveles indicados.

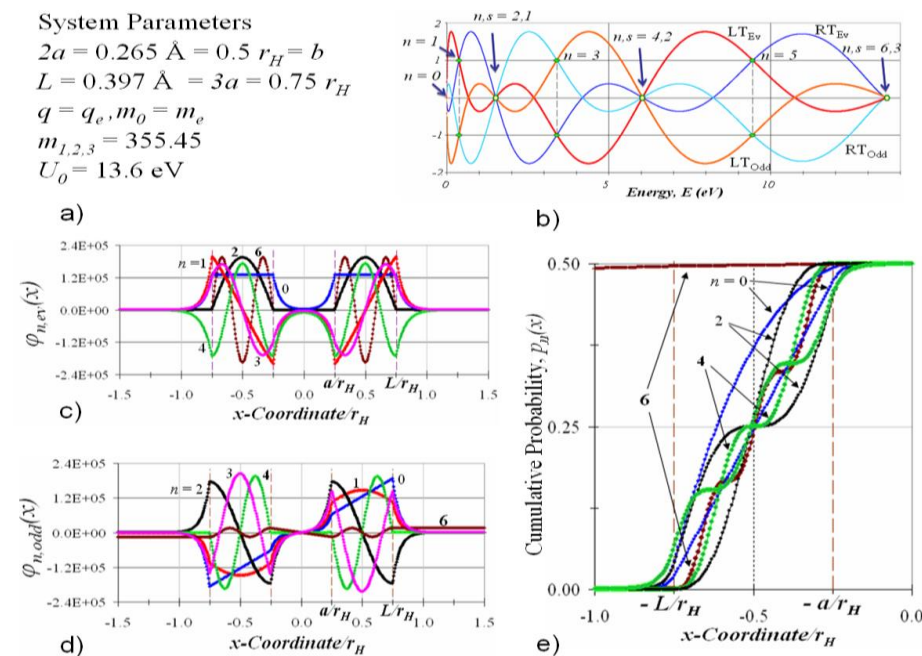


Fig. 5. Definición del sistema caso II, a), gráficas de las ecuaciones (42) y (54), b), ejemplos de funciones de onda pares, c), ejemplos de funciones impares, d), y ejemplo de la probabilidad acumulada para los valores negativos del eje x, e).

La función de la energía de potencial del sistema caso II  $U_{II}(x)$ , los niveles de energía de la partícula permitidos  $E_n$  y las longitudes de onda  $\lambda$  para todas las transiciones posibles entre los niveles de energía se muestran en la Fig. 6. Para este caso, aparecen algunas líneas espectrales adicionales de las series de Lyman y Balmer y surgen también algunas asociadas a las series de Paschen y Humphreys. Los valores de longitudes de onda en negrita indicados en la tabla de la Fig. 6 corresponden a los valores límite de las series espectrales mencionadas.

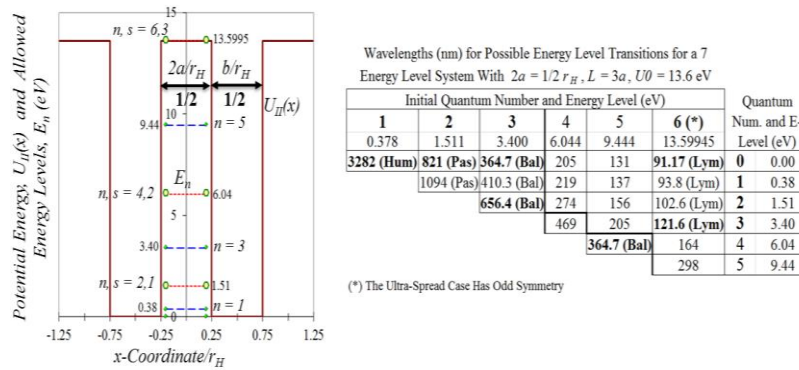


Fig. 6. Izquierda, energía potencial  $U_{II}(x)$  y niveles de energía en el sistema. Derecha, longitudes de onda correspondientes a todos los saltos de energía de la partícula posibles entre cada dos niveles de energía indicados en las transiciones.

*Diferentes sistemas con los mismos niveles de energía. Sistemas gemelos para el sistema caso II*

En esta sección estudiamos tres funciones diferentes de energía potencial  $U_{2,3,4}(x)$  cuyas dimensiones, para todos ellos, son tales que  $a + 0.5b = 0.5r_H$ , esto es, el punto central de los pozos de potencial son iguales al caso II del sistema estudiado más arriba; otros parámetros no geométricos del sistema aquí se mantendrán igual a los valores utilizados en el caso II. La Fig. 7 a) muestra las nuevas funciones de potencial junto con sus niveles de energía permitidos, los cuales son similares a los del sistema caso II. La Fig. 7 b) y c) contienen las gráficas de las ecuaciones (42) y (54) para las funciones de energía potencial  $U_2(x)$  y  $U_4(x)$ , respectivamente; un par de funciones de onda, correspondientes a  $n = 3$  y  $n = 6$  para cada uno de estos potenciales, se presentan en las Fig. 7 d) y e); favor de comparar estas gráficas con las de la Fig. 5.

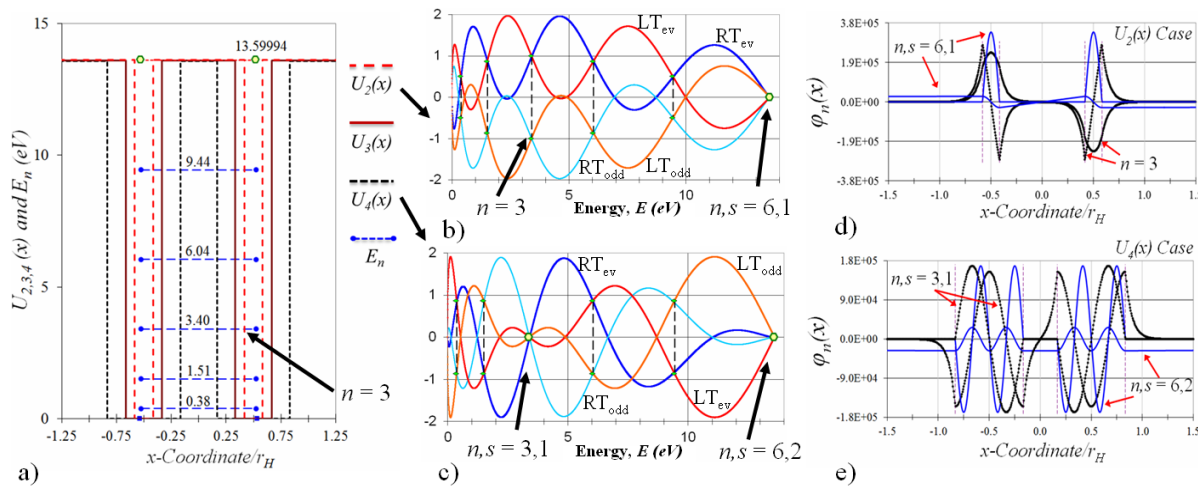


Fig. 7. a) Funciones de energía potencial  $U_{2,3,4}(x)$  y niveles de energía de la partícula permitidos, b) Gráficas de las ecuaciones (42) y (54) para  $U_2(x)$ , c) Gráficas para  $U_4(x)$ , d) Ejemplos de funciones de onda para  $U_2(x)$  y e) para  $U_4(x)$ .

Dado que los niveles de energía permitidos para todos estos sistemas son iguales, también sus conjuntos de emisión o absorción de longitudes de onda son iguales a los dados en la Fig. 6. De aquí que, aún para el sistema con pozos de potencial más angostos  $U_2(x)$  como para el de pozos más anchos  $U_4(x)$ , sería muy difícil diferenciarlos por sus espectros de emisión o absorción de radiación.



Modelo alternativo para el átomo de hidrógeno. Sistema caso III

En los casos previos se ha observado la aparición de algunos valores  $\lambda$  asociados a series espectrales bien conocidas del átomo de hidrógeno. En esta sección estudiamos el caso de un sistema de pozos de potencial duales (DWPS por sus siglas en inglés), con 24 niveles de energía excitados en los cuales encontramos muchos más valores  $\lambda$  correspondientes a líneas espectrales de absorción-emisión del H bien documentadas. Como se comentó en la sección anterior, el conjunto de niveles de energía que dan lugar a los valores  $\lambda$  similares a los casos anteriores pueden obtenerse con más de una configuración del sistema. Para el caso actual hemos elegido el primer caso IIIA definido en la Fig. 8, en donde también se muestra las gráficas de la función de potencial  $U_{III A}(x)$ , los niveles de energía permitidos  $E_n$  y algunas funciones de onda asociadas. Un sistema gemelo, caso IIIB dado en la Fig. 9 para el cual se tiene un factor de masa efectiva de  $4X$  mayor, ha sido introducido en un pozo de potencial más angosto dado por el factor  $0.5X$ ; la relación  $L/a$  se ha mantenido constante en ambos casos, por lo que los niveles de energía de la partícula permitidos son idénticos.

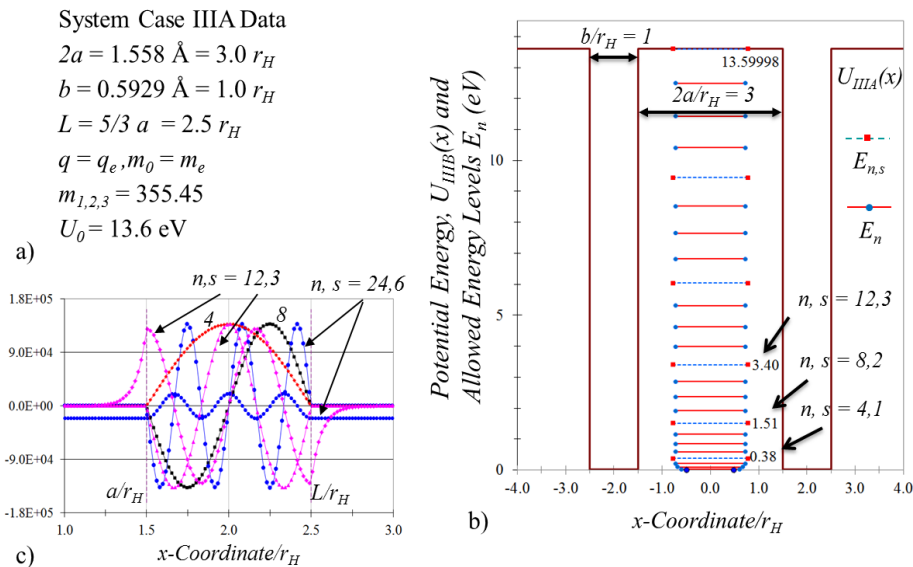


Fig. 8. Parámetros para el caso IIIA con 25 niveles de energía, a), función de energía potencial  $U_{III A}(x)$  y niveles de energía permitidos de la partícula, b), y ejemplo de funciones de onda para ciertos valores de  $n$  en la región del pozo para  $x > 0$ .

Los valores  $\lambda$ , calculados con (93) para las 300 transiciones que involucran los niveles de energía permitidos en el sistema caso III, están dados en la Tabla I. La línea de celdas en zigzag y negritas proporciona una referencia para todas las transiciones que implican una emisión de energía más baja o igual a 3.4 eV, o con no más de una diferencia de 12 niveles de energía involucrados en la transición; a notar que un delta de 12 niveles de  $n = 12$  a  $n = 0$ , corresponde a una transición de energía de 3.4 eV, esto es, un valor  $\lambda$  de 364.7 nm, lo cual es un valor final de la serie de Balmer y que también aparece otras tres veces a lo largo de la línea en zigzag. Los valores en negrita corresponden a longitudes de onda extremas en las series espectrales típicas del hidrógeno.

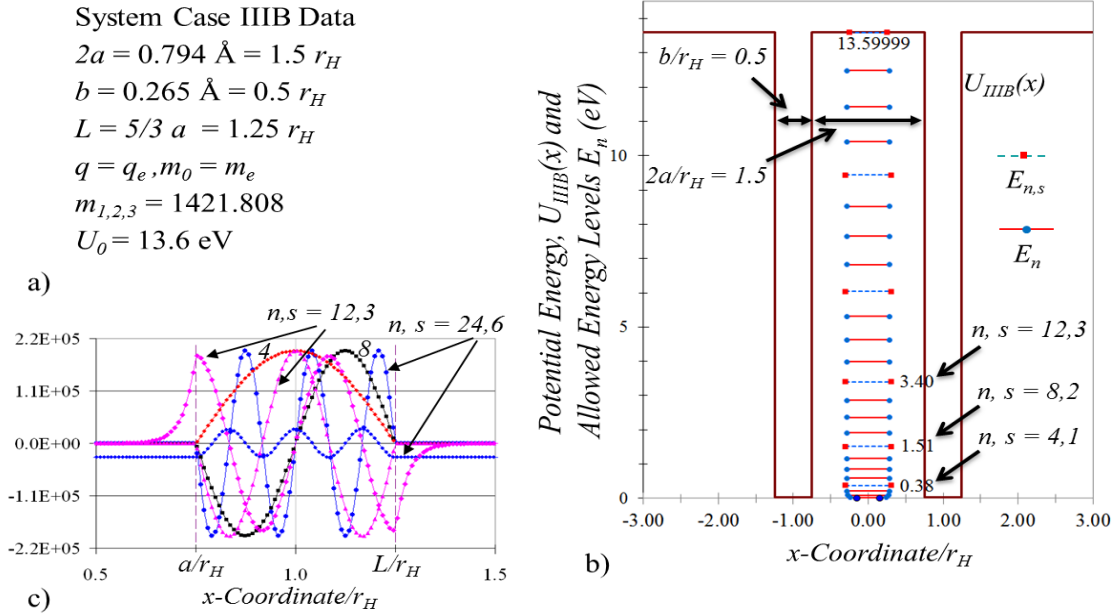


Fig. 9.a) Definición del sistema gemelo del caso IIIB, b) Función de energía potencial  $U_{IIIB}(x)$  y niveles de energía de la partícula permitidos, c) Ejemplo de funciones de onda para unos cuantos valores  $n$  y  $s$  en la región del pozo para  $x > 0$ .

Tabla I. Longitudes de onda de fotones emitidos para todas las transiciones energéticas posibles entre los 25 niveles de energía del DWPS para los casos IIIA y IIIB.

Energía (eV) y Nivel Inicial $m_i$	$\lambda$ ID	Nivel de Energía $E$ (eV) y Nivel Cuántico Final $n_f$																								
		0.0	0.024	0.094	0.212	0.378	0.59	0.85	1.16	1.51	1.91	2.36	2.86	3.40	3.99	4.63	5.31	6.04	6.82	7.65	8.52	9.44	10.41	11.43	12.49	
13.599994 <b>24</b>	$\lambda_{24,0-23}$	<b>91.2</b>	91.3	91.8	92.6	93.8	95.3	97.2	99.6	102.6	106.1	110.3	115.4	<b>121.6</b>	129	138	150	164.1	183	208	244	298	389	<b>571</b>	1117	
12.49 <b>23</b>	$\lambda_{23,0-22}$	99	99	100	101	102	104	107	109	113	117	122	129	136	146	158	173	192	219	256	313	407	597	1167		
11.43 <b>22</b>	$\lambda_{22,0-21}$	108	109	109	111	112	114	117	121	125	130	137	145	154	167	182	203	230	269	328	427	625	1221			
10.41 <b>21</b>	$\lambda_{21,0-20}$	119	119	120	<b>121.6</b>	124	126	130	134	139	146	154	164	177	193	214	243	284	345	449	<b>656.4</b>	1281				
9.44 <b>20</b>	$\lambda_{20,0-19}$	131	132	133	134	137	140	144	150	156	165	175	188	205	227	257	300	<b>364.7</b>	473	691	1346					
8.52 <b>19</b>	$\lambda_{19,0-18}$	145	146	147	149	152	156	162	168	177	188	201	219	242	273	318	386	500	729	1419						
7.65 <b>18</b>	$\lambda_{18,0-17}$	162	163	164	167	170	176	182	191	202	216	234	259	292	339	<b>410</b>	530	772	1500							
6.82 <b>17</b>	$\lambda_{17,0-16}$	182	182	184	188	192	199	208	219	233	252	278	313	362	438	565	<b>820</b>	1591								
6.04 <b>16</b>	$\lambda_{16,0-15}$	205	206	208	213	219	227	239	254	273	300	337	389	469	604	875	1694									
5.31 <b>15</b>	$\lambda_{15,0-14}$	233	234	238	243	251	263	278	298	326	<b>364.7</b>	420	505	648	938	1811										
4.63 <b>14</b>	$\lambda_{14,0-13}$	268	269	273	281	292	307	328	357	398	457	547	700	1010	1945											
<b>3.99</b> <b>13</b>	$\lambda_{13,0-12}$	311	313	318	328	343	<b>364.7</b>	395	438	500	597	761	1094	2100												
3.40 <b>12</b>	$\lambda_{12,0-11}$	<b>364.7</b>	367	375	389	<b>410</b>	441	<b>486</b>	553	<b>656.4</b>	834	1193	<b>2283</b>													
2.86 <b>11</b>	$\lambda_{11,0-10}$	<b>434</b>	438	449	469	500	547	618	729	921	1313	2501														
2.36 <b>10</b>	$\lambda_{10,0-9}$	525	530	547	<b>577</b>	625	700	<b>820</b>	1030	<b>1459</b>	2764															
1.91 <b>9</b>	$\lambda_{9,0-8}$	648	<b>656.4</b>	682	729	808	938	1167	1641	3089																
1.51 <b>8</b>	$\lambda_{8,0-7}$	<b>820</b>	834	875	955	1094	1346	<b>1875</b>	3501																	
1.16 <b>7</b>	$\lambda_{7,0-6}$	1072	1094	1167	1313	1591	2188	<b>4039</b>																		
0.85 <b>6</b>	$\lambda_{6,0-5}$	<b>1459</b>	1500	1641	1945	2626	4774																			
0.59 <b>5</b>	$\lambda_{5,0-4}$	2100	2188	2501	<b>3282</b>	5835																				
0.378 <b>4</b>	$\lambda_{4,0-3}$	<b>3282</b>	3501	4376	7502																					
0.212 <b>3</b>	$\lambda_{3,0-2}$	5835	6564	10502																						
0.094 <b>2</b>	$\lambda_{2,0-1}$	13128	17504																							
0.024 <b>1</b>	$\lambda_{1,0}$	52511																								



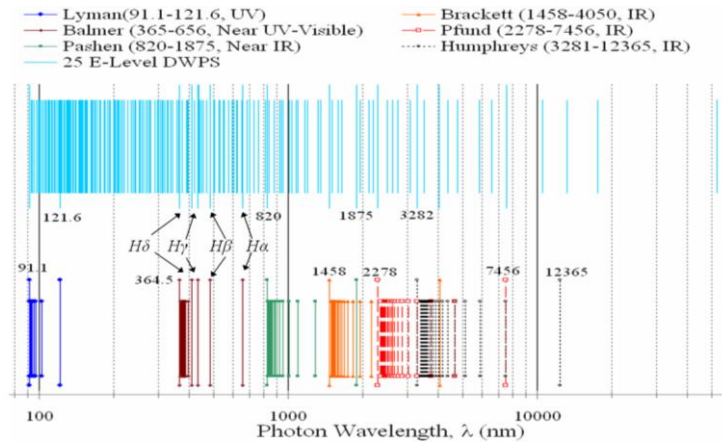


Fig. 10. Abajo, longitudes de onda calculadas con (94) y, arriba, las calculadas con (93) para el caso DWPS IIIA. Las líneas en la serie de Balmer, identificadas como  $H\alpha$ ,  $H\beta$ ,  $H\gamma$  y  $H\delta$ , son de 656.4 nm, 486 nm, 434 nm y 410 nm, respectivamente.

La Fig. 11 proporciona una vista más cercana de los datos de la serie de Balmer, esto es, en las regiones del espectro electromagnético UV cercano y en el rango visible, y como se comparan con las líneas de absorción solar de Fraunhofer; los datos correspondientes al caso III también se grafican indicando los cinco tipos de posibles transiciones, es decir, transiciones de un nivel  $n$  excitado, par o impar, hacia abajo hasta  $n = 0$ , transiciones entre niveles con valores de  $n$  pares o entre niveles con valores de  $n$  impares, o bien, desde niveles con valores de  $n$  pares a valores de  $n$  impares o viceversa.

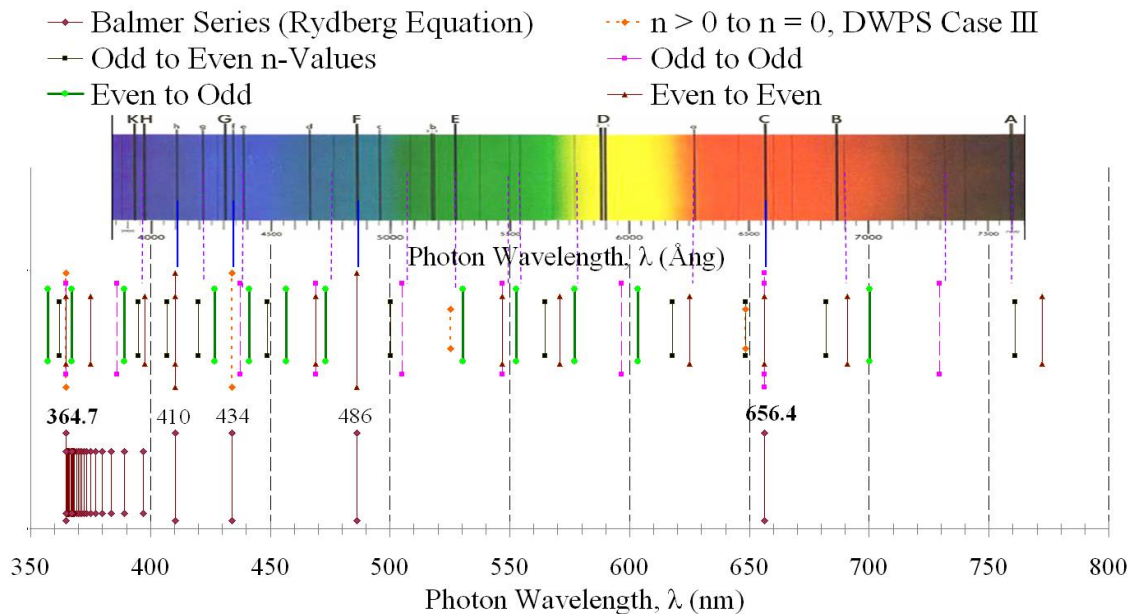


Fig. 11. Serie de absorción solar de Fraunhofer, arriba, comparada con las líneas de absorción del DWPS caso III, parte central, y con las de la serie de Balmer, abajo. La imagen del espectro Fraunhofer se tomó de [2].

Hagamos ahora la comparación de dos conjuntos de líneas  $\lambda$  obtenidos con (93) y (94) con respecto al espectro de los procesos de absorción basados en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno. Primero, consideremos los saltos de absorción necesarios para la generación de las líneas espectrales de la serie de Balmer. Como se muestra en la Fig. 12, para tener un proceso de absorción que involucra  $n = 2$ , como lo requiere la serie de Balmer, es necesario primero enviar el electrón a este nivel por una absorción previa de un fotón con una energía de 10.2 eV. Una vez que se ha conseguido esto, la

absorción de un segundo fotón, con cualquiera de las energías del lado derecho de la Fig. 12, contribuye a la línea espectral en la serie de Balmer relacionada a cada uno de los cuatro niveles de energía de la partícula permitidos; estas líneas son:  $H_\alpha = \lambda_{2,3}$ ,  $H_\beta = \lambda_{2,4}$ ,  $H_\gamma = \lambda_{2,5}$  y  $H_\delta = \lambda_{2,6}$ .

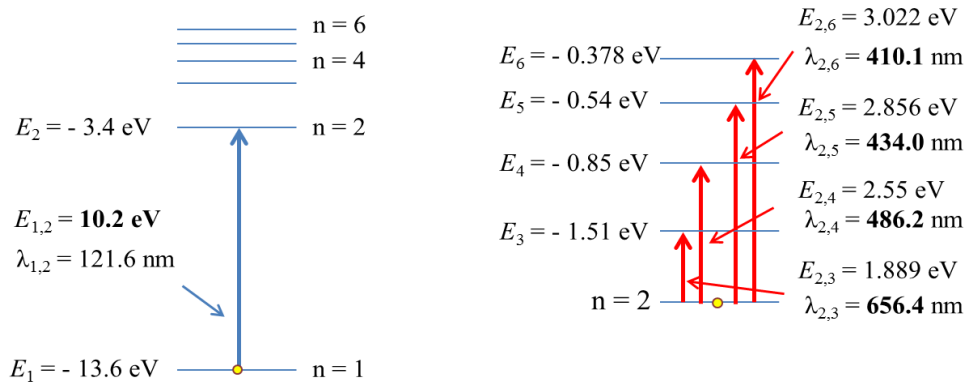


Fig. 12. Eventos en el modelo del hidrógeno de Bohr para producir la serie de Balmer. Izquierda, un fotón de energía UV es absorbido. Derecha, un segundo fotón es absorbido para que el electron pase a un nivel de energía entre  $n = 3$  a  $6$ .

Aquí es importante hacer notar que la mayor parte de los fotones reemitidos tienen una energía mayor o igual a 10.2 eV, esto es, las líneas  $\lambda$  en la serie de Lyman con transiciones hacia abajo hasta  $n = 1$ . Vale la pena mencionar que para el modelo de Bohr, en todo evento de absorción o de emisión, se considera que el electrón transita instantáneamente entre  $n$  órbitas circulares precisas que tienen un radio que crece con la energía del electrón.

Para el caso III del sistema dual de pozos de potencial necesitamos considerar los primeros 12 niveles de energía como se muestra en la Fig. 13, donde los niveles pares numerados están identificados con un hexágono y los impares con rombos. En este caso, en el lado izquierdo de la Fig. 13 el electrón es primeramente excitado con la absorción de un fotón de baja energía del nivel  $n = 0$  a cualquier otro nivel con  $n = 1, 4, 6$  ó  $8$ . Enseguida, y como se muestra en el lado derecho de la Fig. 13, el electrón absorbe otro fotón con alguna de las energías indicadas y es transferido ya sea al nivel con  $n = 9$  ó bien con  $n = 12$ , lo que produce tres de las líneas de la serie de Balmer, esto es,  $H_\alpha = \lambda_{1,9} = \lambda_{8,12}$  (dual),  $H_\beta = \lambda_{6,12}$  y  $H_\delta = \lambda_{4,12}$ . La transición directa de  $n = 0$  a  $n = 11$  corresponde a la línea de absorción de 434 nm, es decir,  $H_\gamma = \lambda_{0,11}$ , lo cual se muestra en el lado izquierdo de la Fig. 13.

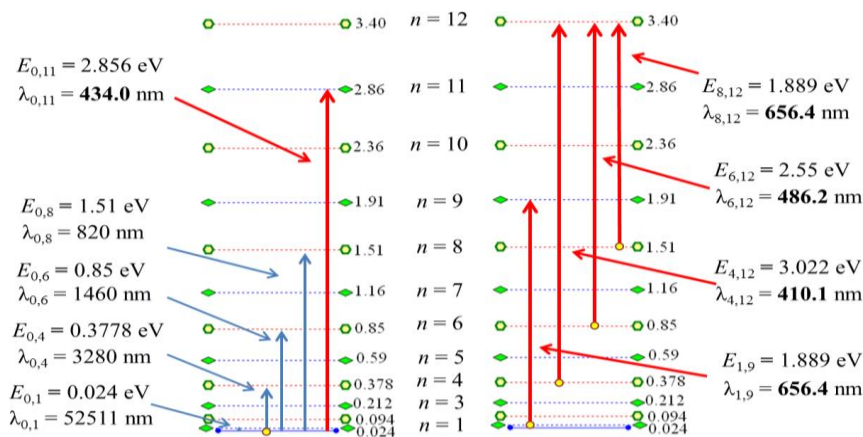


Fig. 13. Transiciones energéticas requeridas para producir las líneas espectrales de absorción de la serie de Balmer basadas en los 25 niveles de energía del caso III del DWPS. Favor de comparar con la Fig. 12 y ver descripción en el texto.

En la Fig. 13 podemos observar que tres de las transiciones ocurren entre dos valores pares de  $n$ , otro más ocurre entre dos valores impares de  $n$  y uno adicional de un valor impar de  $n$  a  $n = 0$ . Hay muy poca información experimental respecto a la probabilidad de transición entre los niveles de energía involucrados en los espectros de absorción; una fuente útil de información es el sitio [3], en donde se proporciona interesantes datos de conteo de absorción para muchos elementos; los números reportados para las líneas de  $H$  [4] se reproducen aquí en la Fig. 14. La línea dual  $H_\alpha$  ubicada en  $\lambda \approx 656.3$  nm es más de dos veces más fuerte que todas las otras cuatro líneas que se muestran en la gráfica combinadas.

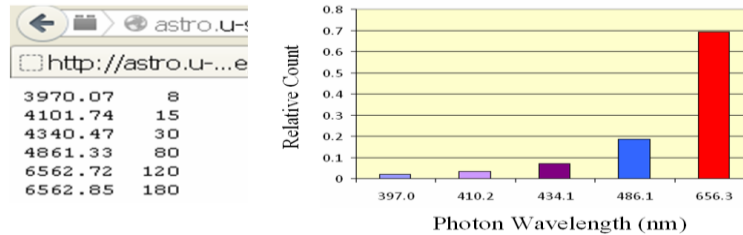


Fig. 14. Intensidad relativa de las principales líneas de absorción de la serie de Balmer. Los datos usados para generar la gráfica se dan en la tabla de la izquierda; éstos fueron obtenidos de [3] y están dados en Ång.

Para este sistema, a menos de que ocurra una absorción más de otro fotón en el nivel  $n = 12$ , la energía de los fotones reemitidos no exceden de 3.4 eV, esto es, las líneas en la serie de Lyman están excluidas. Adicionalmente, y como puede observarse en la Tabla I y la Fig. 11, el caso III del *DWPS* predice la presencia de unas cuantas líneas verdes y amarillas, es decir, líneas en el rango de longitudes de onda de 500 a 600 nm, las cuales falla en predecir el modelo de Bohr y no están presentes en la serie de Balmer. Para el *DWPS* el concepto de diferentes orbitas precisas para la partícula no está presente, en su lugar la partícula cambia su patrón de oscilación de un estado de energía a otro, manteniendo dos valores modales de la posición  $x$  fijos, esto es, los puntos centrales de los pozos en  $x = \pm (a + 0.5 b)$ .

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo, el comportamiento cuántico de una partícula en un sistema de doble pozo de potencial (*DWPS*) finito ha sido establecido resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y derivando varios conjuntos de funciones de onda del sistema. La partícula estudiada ha sido un electrón con carga  $q$  y masa en reposo de  $m_0$ . Se ha demostrado que para ciertas combinaciones de parámetros del sistema, puede haber un conjunto de niveles de energía de partículas permitidos dando lugar a estados doblemente degenerados para lo cual las funciones de onda muestran una dualidad de simetría par-impar; adicionalmente, para un conjunto de estos estados, se tiene una dualidad de túneleo permitido-prohibido, esto es, para estos estados la partícula muestra túneleo normal a través de las paredes del pozo para una simetría de las funciones o tiene un efecto de super-localización en los pozos (*WSL*) para el otro caso de simetría de la función; la naturaleza simétrica de la función de onda que ha dado lugar a esta dualidad se intercambia por números de estados cuánticos consecutivos. Un caso particular de tales estados se puede encontrar en un nivel de energía de la partícula cercana a la altura del pozo  $E \approx U_0$  cuya degeneración es tal que la partícula se encuentra ya sea *WSL* para una función de onda simétrica o muestra un comportamiento ultra-disperso (*UD*) para la otra simetría.

La distribución espacial observada para la partícula con naturaleza de corto o largo alcance es un ejemplo de un estado cuántico degenerado para el cual se espera que la partícula exista en una de dos distribuciones espaciales completamente diferentes sin requerir energía ni tiempo para transitar entre ellos, este es un fenómeno conocido como entrelazamiento cuántico o como Einstein se refirió a ello un efecto de “acción fantasmal a distancia”; esta extraña denominación se debe principalmente a su implicación en la tele-transportación de entidades cuánticas, las cuales han encontrado importantes usos prácticos en la computación cuántica hoy en día.

Por otra parte, se demuestra que el *DWPS* puede ser tal que un conjunto dado de niveles de energía permitidos para la partícula se puede obtener con diferentes configuraciones de los parámetros del sistema, dando lugar a una serie de sistemas gemelos difíciles de distinguir entre sí.

Finalmente, los ejemplos de cálculo que se proporcionan para este sistema generan conjuntos de niveles de energía permitidos para la partícula en los que se pueden producir transiciones energéticas que proporcionan un buen ajuste a las principales series de líneas espectrales reportadas para el átomo de hidrógeno así como con las líneas de absorción solar de Fraunhofer. Con esta información en mente, un conjunto de *DWPS* gemelos que tienen 25 niveles de energía permitidos se ha comparado contra las del conjunto de niveles de energía proporcionado por el modelo de Bohr para describir los procesos requeridos para producir las líneas espectrales de absorción del H en ambos modelos; se encuentra que el *DWPS* proporciona un modelo alternativo bastante sólido para el átomo de hidrógeno. El lector puede encontrar material interesante sobre el sistema aquí estudiado en [5], [6] y [7].

### REFERENCIAS

- [1] S. J. Wiesner, "Conjugate Coding", *SIGACT News* 15:1, pp. 78–88, 1983.
- [2] C. Seligman, "Online Astronomy Text. Background Physics: Light and Matter. Absorption, emission and continuous spectra", 2013. Retrieved March 8, 2014, from: <http://cseligman.com/text/physics/absorptionemission.htm>.
- [3] Köppen, "Spectra of gas discharges," Strasbourg/Illkirch/Kiel, 2007. Retrieved March 8, 2014, from: <http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/discharge/>
- [4] J. Köppen, "Spectra of gas discharges. The hydrogen data," Strasbourg/Illkirch/Kiel, 2007. Retrieved March 8, 2014, from: <http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/discharge/hydrogen.txt>
- [5] E. Saucedo-Flores, R. Ruelas and V. Rangel-Cobián "Particle in a Dual Well Potential System: A Simple Quantum Model for Well Super-Localization and Ultra-Dispersion Duality Effect. An Alternative Model for the Hydrogen Atom" DIP-CUCEI UdeG, Research Report No. CA378/13, March 5, 2014.
- [6] E. P. O'Reilly, *Quantum Theory of Solids*, Taylor & Francis, London and New York, 2005, pp. 20-32.
- [7] P. A. Cox, *Introduction to Quantum Theory and Atomic Structure*, Oxford: University Press, 1966, pp. 37-68.