La fórmula de Bayes en finanzas matemáticas: el caso de las probabilidades no positivas

Oswaldo González-Gaxiola
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa. Ciudad de México; México
ogonzalez@cua.uam.mx

Abstract— In 1942, P. A M. Dirac in his seminal work "The Physical Interpretation of Quantum Mechanics" said: “Negative energies and probabilities should not be considered as nonsense. They are well-defined concepts mathematically, like a sum of negative money,...”. In this paper we analyze some examples of mathematical finance in which negative probabilities may appear. The examples illustrate why explored negative probabilities are not necessarily nonsense, and could even be useful not only in financial mathematics but in other areas of knowledge

Keyword— *financial asset, Bayes formula, volatility.*

Resumen— En 1942, P. A M. Dirac en su trabajo seminal “The Physical Interpretation of Quantum Mechanics” dijo “Las probabilidades y las energías negativas no se deben considerar como una tontería. Estos son conceptos matemáticamente bien definidos, como lo es una suma negative de dinero,. . . ” En el presente trabajo analizaremos algunos ejemplos de las finanzas matemáticas en los cuales las probabilidades negativas (pseudo-probabilidades) pueden aparecer. Los ejemplos que se estudiarán ilustran el por qué probabilidades negativas no son necesariamente cosas sin sentido, y que incluso podrían ser útiles no nada más en las matemáticas financieras sino en otras áreas del conocimiento**.**

Palabras claves— activo financiero, fórmula de Bayes, volatilidad.

I. INTRODUCCIÓN

En las finanzas matemáticas, las probabilidades negativas se consideran sin sentido. Si se hace una búsqueda en la literatura de las finanzas, los comentarios que se encuentran sobre las probabilidades negativas todos son negativos, Véase, por ejemplo, Brennan y Schwartz (1978), Hull y White (1990), Derman, Kani, y Chriss (1996), Chriss (1997), Rubinstein (1998), Hoffmann-Jørgensen (1994), Hull (2002). ¿Por qué se dan esos comentarios sobre las probabilidades negativas? La respuesta simplemente es que "todos" nos enseñaron que las probabilidades, por definición, deben estar entre 0 y 1, como se supone en los axiomas de Kolmogorov. Nuestra animadversión a las probabilidades negativas podría ser vista como si decidiéramos limitarnos a considerar el dinero sólo como una cantidad positiva. Nosotros no somos los primero en pensar que las probabilidades negativas pueden ser útiles. Las probabilidades negativas, fueron consideradas por primera vez por Paul Dirac. Dirac es probablemente más conocido por su predicción matemática de la antimateria.

La idea de las probabilidades negativas más tarde tiene una mayor atención en la física y en particular en la mecánica cuántica. Otro físico famoso, Richard Feynman (también premio Noble de Física), argumentó que nadie se opone a la utilización de los números negativos en los cálculos, aunque "menos tres manzanas" no es un concepto válido en la vida real.

Feynman discute principalmente la fórmula de Bayes para la probabilidad condicional

$$P(B)=\sum_i P(B/A_i)P(A_i) \text{con} \sum_i P(A_i)=1.$$

Si se mantiene la idea es que $P(B)$ es un número positivo, entonces no es un problema si algunas de las probabilidades $P(B/A_i)$ o $P(A_i)$ son negativas o mayores que la unidad. Este enfoque funciona bien cuando no se pueden medir todas las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$ las probabilidades incondicionales $P(A_i)$ en un experimento. Es decir, las variables A_i pueden relacionarse con estados ocultos. Este enfoque ha sido utilizado en física cuántica para resolver problemas relacionados con variables ocultas.

II. PROBABILIDADES CONDICIONALES EN LAS FINANZAS

En esta sección analizaremos algunos ejemplos de donde las probabilidades negativas pueden aparecer en las finanzas matemáticas. Los ejemplos son a nivel divulgación, esperamos sin embargo, que ilustren por qué probabilidades negativas no son necesariamente "malas", y que incluso podrían ser útiles.

El muy conocido modelo de árbol binomial de Cox, Ross y Rubinstein (1979), donominado árbol CRR, se utiliza a menudo para hallar el precio de una variedad de instrumentos derivados, incluidas las opciones europeas y americanas. El árbol CRR puede ser visto como una discretización del movimiento browniano geométrico:

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma(t)S(t)dW(t),$$

donde S es el precio de los activos, μ es el drift y σ es la volatilidad del activo. En el árbol CRR el precio del activo en cualquier nodo del árbol está dado por

$$Su^i d^{j-i}, \text{ para } i=0,1,\ldots,j,$$

donde el tamaño del salto del precio del activo hacia arriba o hacia abajo puede tomar en cada paso de tiempo Δt es dado por

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

donde $\Delta t=T/n$ es el tamaño (en tiempo) del paso con n el número de pasos de tiempo.

El diseño del precio de los activos (es decir, la geometría del árbol) que llamaremos espacio muestral (el conjunto de todos los valores de los precios de los activos en los nodos del árbol S_{ij}). La medida de probabilidad P es el conjunto de las probabilidades en los distintos nodos. Las probabilidades relacionadas con cada nodo del árbol CRR se deriva del principio de arbitraje

$$Se^{b_i\Delta t}=p_i uS+(1-p_i)dS, \tag{1}$$

donde p_i es la probabilidad neutral al riesgo del precio de los activos, ésta va aumentando con el paso del tiempo, y b_i es el translado del costo del activo subyacente.

Considerando (1) y despejando p_i, obtenemos

$$p_i = \frac{e^{b_i \Delta t} - d}{u - d}.$$

La probabilidad de que en el árbol CRR se va hacia abajo debe ser $1 - p_i$ ya que la probabilidad de ir ya sea hacia arriba o hacia abajo es igual a la unidad. Según lo mencionado por Chriss (1997) una baja volatilidad y costo relativamente alto de acarreo en el árbol CRR pueden conducir a las probabilidades (neutrales al riesgo) negativas.

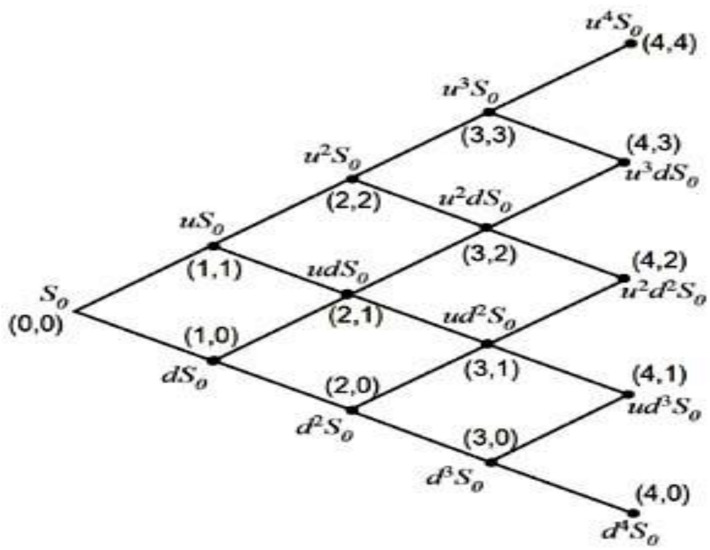

Figure 1. **Binomial Tree Structure**

Más precisamente, nosotros tendremos probabilidades negativas en el árbol CRR cuando $\sigma < \left| b_i \sqrt{\Delta t} \right|$.

En este contexto, es importante mencionar que, incluso si el árbol binomial CRR puede dar negativo y más a la unidad en probabilidades de la suma de las ramas de abajo y de arriba, seguirá la suma total siendo uno.

III. UN EJEMPLO DE PROBABILIDADES NEGATIVAS

Supongamos que estamos usando un árbol binomial CRR para valorar un instrumento derivado, y consideremos para esto el siguiente ejemplo. El precio de los activos es de 100 euros, el plazo de vencimiento del instrumento derivado es de 6 meses, la volatilidad del activo subyacente es del 2%, el coste de acarreo del activo subyacente es de 12% para el primer mes, y están aumentando por 0.5% por cada mes de ahí en adelante. Por simplicidad utilizamos sólo seis pasos de tiempo. Es decir, S = 100, T = 0.5, b_1 = 0.12, σ = 0.02 y n = 6. De lo anterior, tenemos que $\Delta t = \frac{0.6}{6} = 0.833$ y

$$u = e^{0.02\sqrt{0.0833}} = 1.006, \quad d = e^{-0.02\sqrt{0.0833}} = 0.9942.$$

Además, considerando lo anterior, tenemos una probabilidad neutral al riesgo de

$$p_1 = \frac{e^{b_1 \Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{(0.12)(0.0833)}}{1.006 - 0.9942} = 1.3689,$$

y obtenemos con el cálculo anterior, una probabilidad en la rama hacia abajo en el árbol CRR de

$$1 - p_1 = 1 - 1.3689 = -0.3689.$$

Como era de esperar, tenemos probabilidades negativas.

En esta versión generalizada del árbol CRR podemos tener diferentes probabilidades para cada uno de los pasos, incluso pudiéramos tener probabilidades fuera del intervalo $[0,1]$ para algunos pasos de tiempo y el interior para otros pasos diferentes de tiempo, en el ejemplo numérico las probabilidades fueron fuera del intervalo $[0,1]$.

Cuando observamos probabilidades negativas en un modelo de árbol CRR tenemos al menos tres opciones

- Podemos considerar las probabilidades negativas como inaceptables, y cualquier modelo de rendimiento financiero con probabilidades negativas lo tendríamos que desechar. O alternativamente, el modelo debería de utilizarse solamente si los parámetros de entrada hacen que se obtengan resultados con probabilidades no negativas.
- Invalidar las probabilidades negativas o mayores que uno. Básicamente reemplazándolas por probabilidades adecuadas en el intervalo $[0,1]$ en consonancia con el marco axiomático estándar.
- Mirar las probabilidades negativas como una herramienta matemática útil para agregar más flexibilidad al modelo.

Si consideramos el tercer caso; los problemas con el árbol CRR en realidad no son las probabilidades negativas, pero lo es la elección del espacio muestral. Las probabilidades negativas se limitan a indicar que el precio a plazos se encuentra fuera del espacio muestral. Los precios a plazos se encuentran en un "estado oculto", no cubiertos por la ubicación sub-óptima de los nodos en el árbol. La selección sub-óptima del espacio de muestra sin duda podría ser un problema cuando se trata de valorar algunas opciones.

IV. ALTERNATIVA PARA CORREGIR LAS PROBABILIDADES NEGATIVAS

Podemos acotar la volatilidad para lograr que las probabilidades tanto de subida o hacia arriba en el árbol CRR, como las de bajada o hacia abajo sean siempre positivas. Esto se logra si nos limitamos a considerar:

$$s > \sqrt{2b + \frac{2}{3Dt} + \frac{2\sqrt{1+6bDt}}{3Dt}}\,,$$

o bien

$$s < \sqrt{2b + \frac{2}{3Dt} - \frac{2\sqrt{1+6bDt}}{3Dt}}\,,$$

respectivamente.

V. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

La idea de Feynman para la aplicación de las probabilidades negativas (variables ocultas) puede posiblemente tener algunos paralelismos en las finanzas. Los rendimientos esperados, y el riesgo esperado (volatilidad esperada, correlación, etc.) son variables que no se pueden observar directamente (son ocultas). Tales variables ocultas en las finanzas siguen desempeñando un papel importante y pueden afectar a otras variables observables. Morini (2011) describen estas variables como ocultas en el contexto financiero, relacionado dichas variables con el riesgo del modelo.

En situaciones reales, el precio de los activos para el valor de la opción podría caer con facilidad fuera del espacio muestral (espacio del modelo). El precio de ejercicio X también puede caer fuera del espacio de muestra del árbol. Este parece ser el principal problema con el árbol de CRR, y no las probabilidades negativas. La razón principal de que las probabilidades negativas no han sido muy usuales en finanzas matemáticas es, probablemente, que los investigadores que han desarrollado estos modelos han estado haciendo esto bajo la creencia de que cualquier probabilidad debe estar entre cero y uno, (probabilidades de Kolmogorov). Hasta ahora, sólo hemos hecho un débil intento de seguir los pasos de Dirac y Feynman. Es decir, hemos considerado probabilidades negativas sólo como cantidades formales que pueden ser útiles en ciertos cálculos. La mayoría de la gente en las finanzas cuantitativas están interesados en las finanzas y no el fundamento de la teoría de la probabilidad y probablemente por esta razón ignoran que el modelo a la Komologorov no es necesariamente una visión completa de la realidad estocástica. Para dar el siguiente paso, tenemos que utilizar una base matemática rígida para una teoría de la probabilidad que también permita probabilidades negativas. Andrei Khrennikov ha desarrollado una teoría de este tipo, y ha encontrado la raíz de las probabilidades negativas en el fundamento mismo de la teoría de la probabilidad. Estos fundamentos se encuentran a detalle matemático en su brillante libro: "Las interpretaciones de la probabilidad" Khrennikov (1999). En resumen, las probabilidades negativas en realidad nos permiten añadir flexibilidad al modelo.

"Si eliminas lo imposible, lo que queda, por improbable que parezca, debe ser la verdad"
Sherlock Holmes.

REFERENCIAS

[1] Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1977). Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13(3), 461. https://doi.org/10.2307/2330152

[2] Chriss, N. A., & Chriss, N. (1997). Black Scholes and Beyond: Option Pricing Models. McGraw Hill Professional.

[3] Cox, J., Ross, S. L., & Rubinstein, M. P. (1979). Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics, 7(3), 229-263. https://doi.org/10.1016/0304-405x(79)90015-1

[4] Morini, M. (2011). Understanding and Managing Model Risk: A Practical Guide for Quants, Traders and Validators. John Wiley & Sons.

[5] Derman, E., Kani, I., & Chriss, N. (1996). Implied Trinomial Tress of the Volatility Smile. Journal of Derivatives, 3(4), 7-22. https://doi.org/10.3905/jod.1996.407952

[6] Dirac, P. A. M. (1942). Bakerian Lecture - The physical interpretation of quantum mechanics. Proceedings of the Royal Society of London, 180(980), 1-40. https://doi.org/10.1098/rspa.1942.0023

[7] Feynman, R. (1987). Negative Probability. In: Hiley, B.J. and Peat, F., Eds., Quantum Implications: Essays in Honour of David Bohm, Routledge & Kegan Paul Ltd., London and New York, 235-248.

[8] Hull, J. (2002). Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall.

[9] Hull, J., & White, A. (1990). Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25(1), 87. https://doi.org/10.2307/2330889

[10] Hoffmann-Jørgensen, J. (1994). Probability With a View Towards Statistics, Volume I. https://doi.org/10.1201/9780203742013

[11] Khrennikov, A. (1999). Interpretations of Probability. de Gruyter.

[12] Rubinstein, M. P. (1998). Edgeworth Binomial Trees. Journal of Derivatives, 5(3), 20-27. https://doi.org/10.3905/jod.1998.407994