Transformada de Radon de la derivada parcial de una función en un dominio acotado en el plano

Alexandre Grebennikov, Ana Cortés, Armando Espíndola
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, Pue.; México
agrebe@fcfm.buap.mx, htebzilan@gmail.com, espinpozos@gmail.com

Abstract— For the implementation of direct Radon transform to partial differential equations in limited domains of the plane it is necessary to have some properties related to the Radon transform applied the partial derivatives of functions in limited domains. The present work aims to enunciate and demonstrate such properties, which has its foundation in the rule of derivation of Leibniz.

Keyword— Radon transform, derivatives, property, limited domains, plane.

Resumen— Para la aplicación de la Transformada Directa de Radon a ecuaciones diferenciales parciales en dominios acotados del plano, es necesario tener algunas propiedades relacionadas con la trasformada de Radon de las derivadas parciales de funciones en dominios acotados. El presente trabajo tiene por objetivo enunciar y demostrar dichas propiedades, la cual tiene su fundamentación en la Regla de Derivación de Leibniz.

Palabras claves— Transformada de Radon, derivadas, propiedad, dominio acotado, plano.

I. INTRODUCCIÓN

Para la aplicación de la Transformada Directa de Radon a ecuaciones diferenciales parciales en dominios acotados del plano, es necesario tener algunas propiedades relacionadas con la trasformada de Radon de las derivadas parciales de funciones en dominios acotados. El presente trabajo tiene por objetivo enunciar y demostrar dichas propiedades, las cuales tienen su fundamentación usando la Regla de Derivación de Leibniz, léase José Alfredo Cañizo [1]. Tales propiedades ya fueron aprobadas numéricamente en el trabajo de Grebennikov [2].

II. TRABAJOS RELACIONADOS

Si la función $f(x,y) \in S(\mathbb{R}^2)$, como lo plantea Helgason y Stamley [3,4] se cumple:

$$\begin{aligned}
&\textbf{a)}\quad R[\frac{\partial f}{\partial x}](p,\varphi) = \cos\varphi \frac{d\hat{f}}{dp}, \qquad && \textbf{b)}\quad R[\frac{\partial f}{\partial y}](p,\varphi) = sen\varphi \frac{d\hat{f}}{dp} \\
&\textbf{c)}\quad R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2}, && \textbf{d)}\quad R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] = sen^2\varphi \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2} \\
&\textbf{d)}\quad R[\Delta f] = \frac{d^2 \hat{f}}{dp^2} &&
\end{aligned} \tag{1}$$

LISTA DE SÍMBOLOS Y ESPACIOS DE FUNCIONES

Ω:	Es un círculo de radio r dominio acotado de $\mathbb{R}^2$.
$C^2(\Omega)$:	Espacio de funciones dos veces derivable con respecto a las variables espaciales.
$S(\mathbb{R}^2)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables con decrecimiento rápido en infinito.
$\hat{f} = R[f]$:	Transformada de Radon de una función $f(x,y)$.
$\tilde{f}(p,\tau,\varphi)$:	Es la parametrización en coordenadas de Radon de la función $f(x,y)$.
$\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$	Es la parametrización en coordenadas de Radon de las derivadas espaciales de la función $f(x,y)$.

III. DEFINICIÓN

La transformada de Radon de una función $f \in S(\mathbb{R}^2)$, ver Helgason [3], es una familia de integrales de f sobre líneas rectas l, donde estas rectas queda determinadas por dos parámetros p y φ , donde p es la distancia de la recta al origen y φ es el ángulo formado por el eje X y el segmento perpendicular del origen a la recta, ver Figura 1.

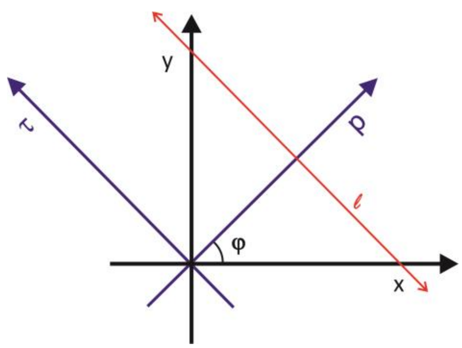

Figura 1

Sea $x\cos\varphi + y sen\varphi = p$ la ecuación de una línea recta l, para puntos $(x,y)\in l$ se tiene la parametrización en coordenadas de Radon como $x = p\cos\varphi - \tau sen\varphi$ y $y = psen\varphi + \tau\cos\varphi$ con $\tau \in \mathbb{R}$. La transformada de Radon de una función $f \in S(\mathbb{R}^2)$ se define como

$$\begin{aligned}\hat{f}(p,\varphi) &= R\left[f(x,y)\right](p,\varphi)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(p\cos\varphi - \tau sen\varphi, psen\varphi + \tau\cos\varphi\right)d\tau\end{aligned} \tag{1}$$

donde $-\infty < p < \infty, \quad 0 \le \varphi < \pi$. La cual cumple la siguiente propiedad, ver [3,4]

$$R\left[\Delta f(x,y)\right] = \frac{d^2\hat{f}}{dp^2} \tag{3}$$

En el caso de dominios acotados, la propiedad (3) en general no es válida. Como se verá en los siguientes resultados.

Sea la función f está definida en un dominio acotado Ω y $f \in C^2(\Omega)$. La extensión de f en todo el plano queda definida de la siguiente manera

$$f(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ 0, & (x,y)\notin\Omega. \end{cases}$$

La transformada de Radon se calcula como

$$\hat{f}(p,\varphi)=\int_{-g(p)}^{g(p)} f\left(p\cos\varphi-\tau\, sen\varphi,\, p\, sen\varphi+\tau\cos\varphi\right)d\tau \tag{4}$$

donde $-r\le p\le r,\ \ 0\le\varphi<\pi$ y $g(p)=\sqrt{r^2-p^2}$.

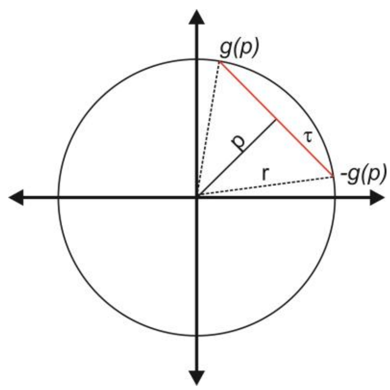

Figura 2

La función f está definida en el sistema de coordenadas rectangulares xy, y dicha función parametrizada $\tilde{f}$ en el sistema de coordenadas de Radon $p\tau$ es

$$f(x,y)=f(p\cos\varphi-\tau\, sen\,\varphi,\, p\, sen\,\varphi+\tau\cos\varphi)=\tilde{f}(p,\tau,\varphi) \tag{5}$$

Dada una función parametrizada $\tilde{f}$ en un dominio circular de radio r que cumpla las hipótesis de la Regla de Derivación de Leibniz, véase José Alfredo Cañizo [1]. Se tiene la siguiente relación

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_{-g(p)}^{g(p)} f(p,\tau,\varphi)\,d\tau=\left[f\left(p,-g(p),\varphi\right)+f\left(p,g(p),\varphi\right)\right]g'(p)+\int_{-g(p)}^{g(p)}\frac{\partial f(p,\tau,\varphi)}{\partial p}d\tau \tag{6}$$

PROPIEDAD 1

Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, donde Ω y f tienen las condiciones de la Regla de Leibniz. Entonces:

$$\textbf{\textit{a)}}\quad R\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\cos\varphi\left(\frac{\partial\hat{f}}{\partial p}-g'(p)\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)+\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]\right) -sen\,\varphi\left(\tilde{f}(p,g(p),\varphi)-\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right) \tag{7}$$

$$\textbf{\textit{b)}}\quad R\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=sen\,\varphi\left(\frac{\partial\hat{f}}{\partial p}-g'(p)\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)+\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]\right)$$
$$-\cos\varphi\left(\tilde{f}(p,g(p),\varphi)-\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right) \tag{8}$$

Demostración a).

De (5) sacamos las derivadas de f con respecto a p y τ se tiene

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial p}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial \tau}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}. \tag{10}$$

De la parametrización de Radon se tiene que $\frac{\partial x}{\partial p}=\cos\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial p}=sen\varphi$, $\frac{\partial x}{\partial \tau}=-sen\varphi$ y $\frac{\partial y}{\partial \tau}=\cos\varphi$.

Por lo cual

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial p}=\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+sen\,\varphi\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial \tau}=-sen\,\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{12}$$

Despejando $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}$ de (12) y sustituyendo en (11)

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial p}=\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{sen\,\varphi}{\cos\varphi}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial \tau}. \tag{13}$$

Integrando (13) con respecto a τ

$$\int_{-g(p)}^{g(p)}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial p}d\tau=\frac{1}{\cos\varphi}R\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\frac{sen\,\varphi}{\cos\varphi}\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)-\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]. \tag{14}$$

Sustituyendo en la regla de Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_{-g(p)}^{g(p)}f\left(p,\tau,\varphi\right)d\tau=\left[f\left(p,-g\left(p\right),\varphi\right)+f\left(p,g\left(p\right),\varphi\right)\right]g'\left(p\right)$$
$$+\frac{1}{\cos\varphi}R\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\frac{sen\,\varphi}{\cos\varphi}\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)-\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]. \tag{15}$$

El lado izquierdo de (15) es igual a $\frac{\partial\hat{f}}{\partial p}$, ahora despejando $R\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$ se tiene

$$R\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\cos\varphi\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial p}-g'(p)\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)+\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]\right)$$
$$-sen\,\varphi\left(\tilde{f}(p,g(p),\varphi)-\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right). \tag{16}$$

Así queda demostrado (7). Análogamente se demuestra para b).

PROPIEDAD 2

Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, donde Ω tienen las condiciones de la Regla de Leibniz y $f\in C^2(\Omega)$.

Entonces:

a) $$R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]=\cos^2\varphi\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial p^2}$$
$$-\cos^2\varphi\; g'(p)\left[\frac{\partial\tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p}+\frac{\partial\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right]$$
$$-\cos^2\varphi\; g''(p)\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)+\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]$$
$$-sen\,\varphi\cos\varphi\left[\frac{\partial\tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p}+\frac{\partial\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right] \tag{17}$$
$$-\cos\varphi g'(p)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(p,g(p),\varphi)+\frac{\partial f}{\partial x}(p,-g(p),\varphi)\right]$$
$$-sen\,\varphi\left[\frac{\partial f}{\partial x}(p,g(p),\varphi)-\frac{\partial f}{\partial x}(p,-g(p),\varphi)\right]$$

b) $$R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]=sen^2\varphi\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial p^2}$$
$$-sen^2\varphi\; g'(p)\left[\frac{\partial\tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p}+\frac{\partial\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right]$$
$$-sen^2\varphi\; g''(p)\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)+\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]$$
$$-sen\,\varphi\cos\varphi\left[\frac{\partial\tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p}-\frac{\partial\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right] \tag{18}$$
$$-sen\,\varphi\; g'(p)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(p,g(p),\varphi)+\frac{\partial f}{\partial y}(p,-g(p),\varphi)\right]$$
$$-\cos\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial y}(p,g(p),\varphi)-\frac{\partial f}{\partial y}(p,-g(p),\varphi)\right)$$

Demostración a)
Se sabe que

$$R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]=R\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}\right] \tag{19}$$

Usando (7) dos veces y distribuyendo las derivadas se tiene

$$R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]=\cos\varphi\left(\begin{array}{l}\cos\varphi\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2}-g'(p)\left[\dfrac{\partial\tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p}+\dfrac{\partial\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right]\\ -g''(p)\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)+\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]\end{array}\right)\\ -sen\,\varphi\left[\dfrac{\partial\tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p}-\dfrac{\partial\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right]\\ -g'(p)\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(p,g(p),\varphi)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(p,-g(p),\varphi)\right]\end{array}\right) \tag{20}$$

$$-sen\,\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p,g(p),\varphi)-\frac{\partial f}{\partial x}(p,-g(p),\varphi)\right)$$

Simplificando

$$\begin{aligned}R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]&=\cos^2\varphi\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial p^2}\\ &-\cos^2\varphi\ g'(p)\left[\frac{\partial\tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p}+\frac{\partial\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right]\\ &-\cos^2\varphi\ g''(p)\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi)+\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right]\\ &-sen\,\varphi\cos\varphi\left[\frac{\partial\tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p}-\frac{\partial\tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right]\\ &-\cos\varphi\ g'(p)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(p,g(p),\varphi)+\frac{\partial f}{\partial x}(p,-g(p),\varphi)\right]\\ &-sen\,\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p,g(p),\varphi)-\frac{\partial f}{\partial x}(p,-g(p),\varphi)\right)\end{aligned} \tag{21}$$

Es lo que se quería demostrar. La demostración b) es análoga.

Debido al papel que juega el Laplaciano en muchas ecuaciones diferenciales parciales se enuncia su transformada de Radon.

$$
\begin{aligned}
R\left[\Delta f(x,y)\right](p,\varphi) = {} & \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2} \\
& - g'(p)\left[\frac{\partial \tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right] \\
& - g''(p)\left[\tilde{f}(p,g(p),\varphi) + \tilde{f}(p,-g(p),\varphi)\right] \\
& - 2\, sen\,\varphi \cos\varphi \left[\frac{\partial \tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p}\right] \\
& - \left(\cos\varphi\, g'(p) + sen\,\varphi\right)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(p,g(p),\varphi) + \frac{\partial f}{\partial x}(p,-g(p),\varphi)\right] \\
& - \left(sen\,\varphi\; g'(p) + \cos\varphi\right)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(p,g(p),\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(p,-g(p),\varphi)\right]
\end{aligned}
\tag{22}
$$

donde

$$
\frac{\partial \tilde{f}(p,g(p),\varphi)}{\partial p} = \left(\cos\varphi \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + sen\,\varphi \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{\substack{x = p\cos\varphi - g(p)\, sen\,\varphi \\ y = p\, sen\,\varphi + g(p)\cos\varphi}}
$$

$$
\frac{\partial \tilde{f}(p,-g(p),\varphi)}{\partial p} = \left(\cos\varphi \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + sen\,\varphi \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{\substack{x = p\cos\varphi + g(p)\, sen\,\varphi \\ y = p\, sen\,\varphi - g(p)\cos\varphi}}
$$

CONCLUSIÓN.

Para la clase de funciones definidas en un dominio acotado del plano, que tienen sus primeras derivadas parciales con respecto a sus variables espaciales iguales a cero en la frontera, la transformada de Radon de las derivadas parciales de primer y segundo orden se reducen a fórmulas que contienen la derivada de la transformada de Radon con respecto de la variable p, si las funciones son suficientemente suaves en un dominio compacto en el plano. De estas propiedades se sigue la relación

$$
R\left[\Delta f(x,y)\right](p,\varphi) = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2}\ .
$$

Es decir, se contribuyó con una fórmula para la transformada de Radon del Laplaciano de una clase de funciones sobre un dominio acotado, la cual es análoga a la que se tiene para todo el plano. Para llegar a este resultado se encontraron las expresiones para la transformada de Radon de las derivadas parciales de primer y segundo orden de una función en un dominio acotado en el plano.

RECONOCIMIENTOS

Este proyecto fue realizado con el apoyo de CONACYT México y Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

REFERENCIAS

[1] José Alfredo Cañizo Rincón, Derivación bajo la integral, julio, 2004. Disponible: http://web.mat.bham.ac.uk/j.a.canizo/tex/dbi.pdf

[2] Grebennikov A. I., General Ray Method for Solution of Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations, APLIEDMATH III, Memorias del Congreso Internacional en Matemáticas Aplicadas, Instituto Politécnico Nacional, México,200-209, 2007.

[3] Helgason Sigurdur, The Radon Transform, Birkhauser, Boston-Besel_Berlin, 1999.

[4] Stamley R. Deans. The Radon Transform and some of its Applications, Jhon Wiley & Sons, Inc. 1983.